स्तर 'ग' C-103
(कक्षा 8 के समतुल्य)

मुक्त बेसिक शिक्षा (प्रौढ़)

गणित

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
ए-24-25, इन्स्टीट्यूशनल एरिया, सेक्टर – 62
नोएडा – 201309 (उ.प्र.)

राष्ट्रीय साक्षरता मिशन प्राधिकरण
मानव संसाधन विकास मंत्रालय
शास्त्री भवन, नई दिल्ली

2016 (प्रतियाँ)

सचिव, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान, ए-24-25, इस्टीटूशनल एरिया, सेक्टर-62, नोएडा-201309
द्वारा प्रकाशित

परामर्श समिति

अध्यक्ष
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

निदेशक (शैक्षिक)
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

सहायक निदेशक (शैक्षिक)
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

पाठ्यचर्या विकास समिति

एस. सी. आनन्द
प्रधनाचार्य, डी ए वी सैनटेनरी-
पब्लिक स्कूल, पश्चिम एन्कलेव
नई दिल्ली-110087

महेन्द्र सिंह दहिया
वरिष्ठ प्रवक्ता (सेवा निवृत)
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण
परिषद, दिल्ली

ऋषिपाल सिंह
प्राचार्य (सेवा निवृत)
केन्द्रीय विद्यालय संगठन
चण्डीगढ़ (संभाग)

राकेश भाटिया
वैदिक गणित विषय प्रमुख
विद्या भारती, हरियाणा

डॉ. सत्यवीर सिंह
प्रधानाचार्य
एस.एन.आई. कॉलेज
पिलाना, बागपत (उ.प्र.)

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी
(गणित)
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

पाठ लेखक

प्रो. मोहन लाल
सचिव तथा सलाहाकार
डी. ए. वी. कालेज प्रबन्धकारिणी
चित्रगुप्ता रोड
नई दिल्ली-110055

डॉ. प्रवीण सिन्कलेयर
गणित प्राध्यापक
स्कूल ऑफ साइंस
आई. जी. एन. ओ. यू.
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली

जी. डी. ढल
के-171, एल. आई. सी. कालोनी
निकट सैयद नांगलोई गांव
पश्चिम विहार, नई दिल्ली

बी. एम. गुप्ता
बी-110/2, ईस्ट ऑफ कैलाश
नई दिल्ली-110065

पी. के. गर्ग
169, पून्ड्रीक विहार, डी-ब्लाक
सरस्वती विहार के सामने
दिल्ली-110034

एस. एन. छिब्बर
बी-330, सरस्वती विहार
दिल्ली-110034

डॉ. कुसुम भाटिया
वरिष्ठ लेक्चरार
डी. आई. ई. टी.
केशवपुरम, दिल्ली-110035

जे. सी. निझावन
टी जी टी (गणित)
सर्वोदय विद्यालय नं-1
शकूरपुर, दिल्ली-110034

राम प्रकाश कश्यप
टी. जी. टी. (गणित)
राजकीय वरिष्ठ विद्यालय
मयूर विहार फेज-1, पाकेट-4
दिल्ली-110091

डी. आर. शर्मा
उपप्राचार्य
जवाहर नवोदय विद्यालय
मुंगेशपुर, दिल्ली-110039

डॉ. सत्यवीर सिंह
प्रधानाचार्य
एस.एन.आई. कॉलेज
पिलाना, बागपत (उ.प्र.)

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी
(गणित)
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

सम्पादक मंडल

महेन्द्र सिंह दहिया
वरिष्ठ प्रवक्ता (सेवा निवृत)
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण
परिषद, दिल्ली

ऋषिपाल सिंह
प्राचार्य (सेवा निवृत)
केन्द्रीय विद्यालय संगठन
चण्डीगढ़ (संभाग)

डी. आर. शर्मा
उपप्राचार्य
जवाहर नवोदय विद्यालय
मुंगेशपुर, दिल्ली-110039

राकेश भाटिया
वैदिक गणित विषय प्रमुख
विद्या भारती, हरियाणा

डॉ. सत्यवीर सिंह
प्रधानाचार्य
एस.एन.आई. कॉलेज
पिलाना, बागपत (उ.प्र.)

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी
(गणित)
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

पाठ्यचर्या समन्वयक

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी (गणित)
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

रेखा चित्रकार एवं टाइप सेटिंग

श्रीकृष्णा ग्राफिक्स
सी-90, वेस्ट विनोद नगर
दिल्ली-110092

आप के साथ दो शब्द

प्रिय शिक्षार्थी,

गणित के इस संशोधित पाठ्यक्रम में आपका स्वागत है। इस पाठ्यक्रम को विशेष रूप से आप जैसे उन विद्यार्थियों के लिए तैयार किया गया है जिनमें पढ़ाई जारी रखने की तीव्र इच्छा है। इस पाठ्यक्रम में 6 मॉड्यूल हैं, जिनमें 20 पाठ हैं। अंकगणित का पहला मॉड्यूल संख्या निकाय और इसकी प्रक्रियाओं की पहचान करने की क्षमता में वृद्धि करता है। इस पुस्तक के पाठों में दैनिक जीवन से जुड़े अनेक क्रियाकलाप आपको मिलेगें।

बीजगणित पर मॉड्यूल आपकी तर्क तथा काल्पनिक शक्ति का विकास करने में सहायता करता है। हमारे सामने प्राय: ऐसी समस्याएं आती हैं, जिनमें पूरी सूचना उपलब्ध नहीं होती। बीजगणित का ज्ञान ऐसी समस्याओं को प्राप्त सूचना के आधार पर हल करने में सहायक होता है।

व्यावसायिक गणित के मॉड्यूल का गणित के क्षेत्र में एक महत्वपूर्ण स्थान है। दैनिक जीवन में हमें बैंकों, कंपनियों तथा दुकानदारों से लेन-देन करना होता है। यह मॉड्यूल आपको किसी कार्य में लाभ या हानि के बारे में ज्ञान देगा तथा बैंक में जमा राशि पर ब्याज ज्ञात करने के विधि भी सिखाएगा।

ज्यामिति पर मॉड्यूल भिन्न-भिन्न ज्यामितीय संकल्पनाओं और आकृतियों की जानकारी देता है।

क्या आपने कभी सोचा है कि जब परीक्षार्थियों की संख्या बहुत बड़ी हो तो परीक्षा में अधिकतम या न्यूनतम अंक कैसे ज्ञात किए जाते हैं? यह सांख्यिकी की सहायता से ज्ञात किए जाते हैं। सांख्यिकी का ज्ञान आंकड़ों का वर्गीकरण और व्याख्या कर निष्कर्ष पर पहुंचने में सहायता करता है।

क्षेत्रमिति के मॉड्यूल में आप भिन्न-भिन्न आकृतियों के क्षेत्रफल, परिमाप और आयतन से परिचित होंगे। हम क्षेत्रमिति के ज्ञान को दैनिक जीवन में दीवारों या फर्श पर सीमेंट करवाने, बाग, खेत का परिमाप एवं क्षेत्रफल जानने तथा किसी तेल के ड्रम का आयतन ज्ञात करने इत्यादि में प्रयोग करते हैं।

हम आशा करते हैं कि यह पुस्तक आपके लिए न केवल उपयोगी साबित होगी बल्कि आपको तार्किक ढ़ंग से सोचने में भी अहम भूमिका प्रदान करेगी। आप सभी मॉड्यूलों के हल किए गए उदाहरणों तथा पाठगत प्रश्नों को अच्छी तरह से हल करते हुए अभ्यास करेंगे तो गणित में आपको कठिनाई नहीं आएगी। इस पाठ्यक्रम से संबंधित आपकी कोई समस्या या कोई प्रश्न हो तो हमें लिखने में संकोच न करें। आपके सुझावों का स्वागत है।

लक्ष्य पर दृष्टि केन्द्रित करें और निशाना साधें!!!

आपकी सफलता के लिए शुभकामनाएँ।

आपका

पाठ्यचर्या समिति (गणित)
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

गणित का महत्व एवं गणित में भारत का योगदान

गणित परिवेश को समझने हेतु मात्रात्मक अध्ययन है। गणित, परिवेश में घटने वाली घटनाओं एवं दैनिक जीवन की समस्याओं के तार्किक ढ़ंग से समाधान में सहायता करता है। गणित सीखने के द्वारा वर्गीकरण, विश्लेषण एवं तार्किक निष्कर्ष निकालने की क्षमता विकसित होती है। इसके द्वारा अनुमान लगाने, संबंध स्थापित करने, सत्यापन एवं प्रमाणित करने तथा खोज करने की कौशल विकसित होता है।

स्तर A तथा B में आकृति, स्थान, पैटर्न, संख्या, मापन इत्यादि की अवधारणाओं पर जोर दिया गया है। स्तर C में इसी क्रम को आधार बनाकर संख्या पद्धति, बीजगणित, ज्यामिति, क्षेत्रमिति इत्यादि की अवधारणाओं की समझ एवं तार्किक चिंतनशीलता पर जोर दिया गया है ताकि शिक्षार्थी दैनिक जीवन से जुड़ी समस्याओं के समाधान में इन अवधारणाओं का उपयोग कर सकें।

हम रोजमर्रा की जिन्दगी में, विज्ञान में, औद्योगिक क्षेत्रों में, विविध व्यवसायों में तथा खाली समय में गणित का उपयोग करते हैं। गणित, अवधारणाओं को सीखने, समझने और कौशलों के प्रयोग से संबंधित है। समाज में ऐसे नागरिकों की आवश्यकता है जो विचार कर सकें, तर्क कर सकें तथा अपनी बात कह सकें तथा उन परिस्थितियों की पहचान कर सकें जहाँ गणित की अवधारणाओं का उपयोग किया जाता है। सूचनाओं को समझने की योग्यता, व्यवसाय में गणितीय अवधारणाओं एवं समुचित रूप से तकनीकी का उपयोग इत्यादि सभी में गणित सीखने की आवश्यकता है।

भारतीय उपमहाद्वीप में गणितीय ज्ञान की खोज की शुरूआत प्राचीन काल से ही दिखाई देती है। गणित के क्षेत्र में संकेत प्रणाली, दाशमिक पद्धति तथा शून्य का उपयोग तीन प्रमुख योगदान है। भारत में यज्ञ की वेदी का निर्माण करने के संदर्भ से ज्यामिति का उद्भव हुआ। शुल्वसूत्र भारत की प्राचीन (1200 से 800 ईस्वी पूर्व) रचनाएँ हैं जो यज्ञ के लिए वेदियों के निर्माण का वर्णन करती है। अर्थात माना जाता है कि भारत में ज्यामिति की उत्पत्ति शुल्वसूत्र से हुई है। शुल्व का अर्थ है मापना, शुल्वसूत्र अर्थात मापने का नियम। उस समय लम्बाई रस्सी से नापी जाती थी इसलिए धीरे-धीरे शुल्व शब्द को रस्सी के लिए प्रयोग किया जाने लगा। बोधायन प्रथम ज्यामितिज्ञ हुए हैं जिन्होंने ज्यामितीय ज्ञान को वैदिक यज्ञों की वेदियों के निर्माण के संदर्भ में विकसित किया था। ज्यामितीय साहित्य मूलतः ऋग्वेद से उत्पन्न हुआ है जिसके अनुसार अग्नि के तीन स्थान होते हैं- वृत्ताकार वेदी में गार्हपत्य, वर्गाकार में अहंयान्या तथा अर्द्धवृत्ताकार में दक्षिणाग्नि। तीनों वेदियों में से प्रत्येक का क्षेत्र समान होता है। उस समय भी वृत्त, वर्ग एवं कर्ण वर्ग का ज्ञान था। यज्ञ व कर्मकाण्ड के सिलसिले में विशेष प्रकार की वेदियों का निर्माण करना पड़ता था। इन वेदियों के निर्माण के लिए भिन्न-भिन्न ज्यामितीय क्रियाओं का प्रयोग किया जाता था। जैसे किसी सरल रेखा पर वर्ग का निर्माण, वर्ग के कोणों एवं भुजाओं को स्पर्श करते हुए वृत्तों का निर्माण, वृत्त का दो गुणा करना इत्यादि।

बोधायन ने अपने सूत्र में विकर्ण के वर्ग का नियम दिया है-

> दीर्घचातुराम्रास्याडक्ष्नायारज्जु पाच्र्व्मानी तियर्ड् मानीच यत् पद्मयग्भूते
> पृथगभूते कुरूतस्तदुभयं करोती।

एक आयत का विकर्ण उतना ही क्षेत्र बनाता है जितने उसकी बड़ी भुजा और छोटी भुजा अलग-अलग मिलकर बनाती है। यही तो पाइथागोरस का प्रमेय है। ऐसा माना जाता है कि भारत में ज्यामिति का विकास बहुत पहले से था तभी भारतीय गणितज्ञों को पाइथागोरस से पहले ही इस संबंध की जानकारी थी। वास्तव में इस प्रमेय को बोधायन-पाइथागोरस प्रमेय भी कहा जा सकता है। बोधायन ने शुल्वसूत्रों के माध्यम से रेखा, पृष्ठ, मापन यंत्र तथा मात्रक का अन्वेषण किया था। शुल्वसूत्रों में पाइथागोरस प्रमेय का वर्णन है किन्तु उसकी व्युत्पति तथा इसको सिद्ध करके नहीं दिखाया गया।

आर्यभट्ट ने अक्षरों का उपयोग संख्याओं को सार्थक करने के लिए, स्थानीय मान पद्धति पर कार्य किया। भारतीय गणितज्ञों का गणित में सबसे प्रमुख योगदान शून्य, जिसका मतलब है कुछ नहीं, की खोज है। यह अवधारणा अपने आप में मानव सभ्यता एवं संस्कृति के विकास में सबसे सार्थक खोजों में से एक है। **ब्रहमगुप्त** ने ऋणात्मक संख्याओं एवं शून्य की विविध संक्रियाओं के बारे में बताया। उन्होंने ब्रहम, स्तूप सैद्धान्तिका की रचना की जिसके कारण अरब के लोग गणितीय पद्धति को जान सके। गणित के क्षेत्र में **भास्कराचार्य**, जिसे **भास्कर-II** के नाम से भी जाना जाता है, भारतीय प्राचीन गणितज्ञों में से सबसे अधिक सृजनशील तथा शक्तिशाली गणितज्ञों में से एक थे। उन्होंने अनन्त का विचार, ऋणात्मक संख्याए तथा शून्य के नियमों का योगदान दिया।

बोधायन ने गणित के बहुत से प्रत्ययों को बहुत पहले ही बता दिया था, जिसकी खोज बाद में पाश्चात्य देशों द्वारा की गई। पाई (π) के मान की खोज सबसे पहले उनके द्वारा ही की गई। पाइथागोरस प्रमेय के प्रमाण पहले से ही शुल्व सूत्र के अन्तर्गत मिलते हैं जो पाइथागोरस के जन्म से भी बहुत पहले लिखी गई थी। महावीराचार्य, एक अन्य भारतीय प्रसिद्ध गणितज्ञ थे, जिन्होंने त्रिकोणमितीय फलनों तथा घन समीकरणों को समझने में योगदान दिया। उन्होंने फलनों, बीजगणितीय समीकरणों, लघुगणकों एवं चरघातांकीय फलनों का बहुत ही रोचक तरीके से वर्णन किया है। **श्रीधर**, जिन्होंने द्विघात समीकरणों के हल प्रस्तुत करने में महत्वपूर्ण योगदान दिया, भारत के सम्मानित गणितज्ञों में से एक हैं।

खगोल शास्त्र एक प्रयोग आधारित गणित है जिसका उपयोग गणितीय समीकरणों के जरिए ब्रहमाण्ड का वर्णन करने के लिए या ब्रहमाण्ड के विभिन्न पहलुओं का अनुमान लगाने के लिए किया जाता है। गणित सदैव से ही खगोल शास्त्र के महत्व में केन्द्रीय भूमिका में रहा है।

प्राचीन भारत में, **नागार्जुन**, जो कि प्रमुख खगोलवेत्ता तथा गणितज्ञ रहे हैं, ने तारों एवं ग्रहों की गति का वर्णन करने के लिए विविध गणितीय समीकरणों का उपयोग किया था। **वाराहमिहिर** भारतीय खगोलवेत्ता रहे हैं जिन्होंने खगोल शास्त्र पर मुख्य रूप से कार्य किया है। उन्होंने पास्कल के काल से पहले ही पास्कल त्रिभुज के एक आयाम तथा जादुई वर्ग पर कार्य किया था। वे, न्यूटन से बहुत पहले ही गुरूत्वाकर्षण की जानकारी रखते थे।

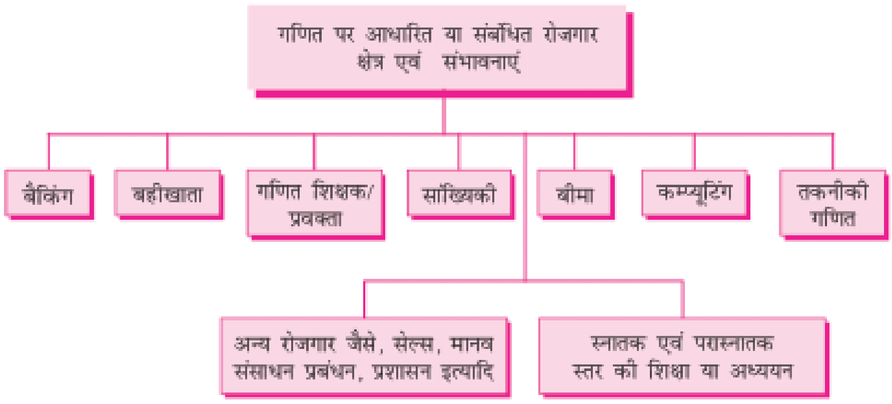
आधुनिक काल में **श्री निवासा रामानुजन** भारत के महान प्रमुख बुद्धिमान गणितज्ञों में से एक थे। रामानुजन का अधिकतम योगदान संख्या सिद्धान्तों पर था। **रामानुजन** ने बताया कि 1729 ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो घनों के योग के रूप में विविध तरीकों से लिखा जा सकता है। इसके बाद से संख्या 1729 को रामानुजन-हार्डी संख्या कहा जाने लगा।

शकुन्तला देवी भी विश्व में एक जानी-पहचानी भारतीय गणितज्ञ रही हैं। उन्हें उनकी जटिल से जटिल गणितीय समस्याओं की बिना किसी सहायता से हल कर पाने की योग्यता के कारण ही उन्हें उनके उपनाम 'मानव कम्प्यूटर' से जाना जाता हैं।

विद्यालयों में गणित शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बच्चे की सोच का गणितीयकरण करना है। आपके विचारों में स्पष्टता लाना तथा मान्यताओं को तार्किक निष्कर्षो तक पहुंचाना ही गणित शिक्षा का केन्द्रीय कार्य है। चिंतन के बहुत से तरीके एवं स्तर होते हैं और गणित में जिस तरह का चिंतन करना बच्चा सीखता है वह अमूर्तो के साथ कार्य करना तथा समस्या समाधान के तरीकों पर आधारित है। उच्च माध्यमिक स्तर ऐसा स्तर है जहां शिक्षार्थी अपने कैरियर के चुनाव के बारे में निर्णय लेते हैं कि उन्हें विश्वविद्यालय स्तर की पढ़ाई जारी रखनी या कुछ और करना है।

इसी समय, शिक्षार्थी की रुचियाँ तथा दृष्टिकोण व्यापक रूप से निर्धारित होते हैं और इन दो वर्षो में गणितीय शिक्षा उनकी योग्यताओं में और अधिक पैनापन लाती है। विश्वविद्यालय स्तर की बहुत सी उपाधियों के लिए गणित एक अनिवार्य विषय के रूप में आवश्यक होता है। ऐसे शिक्षार्थी जो माध्यमिक स्तर तथा उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित की पढ़ाई

में विशेष गंभीर नहीं होते या लापरवाह होते हैं, उन्हें विश्वविद्यालय या अन्य स्तरों पर बहुत से अवसरों से वंचित रहना पड़ता है जिन्हें वे प्राप्त कर सकते थे। आधे से भी अधिक शिक्षार्थियों को इस स्तर से व्यवसाय या नौकरी के कार्यों में लग जाने के लिए बाध्य होना पड़ता है। अच्छे रोजगार हेतु गणित को महत्वपूर्ण स्थान देना कोई अतिश्योक्ति नहीं है। भैतिक विज्ञानों (रसायन शास्त्र, भौतिक शास्त्र, इंजीनियरिंग), भोजन एवं स्वास्थ्य विज्ञान (जीव विज्ञान, मनोविज्ञान, औषध विज्ञान, उपचर्या (नर्सिंग), दृष्टिमाप विज्ञान) सामाजिक विज्ञानों जैसे सम्प्रेषण, अर्थशास्त्र, शिक्षाशास्त्र, भाषा विज्ञान, भूगोल, तकनीकी विज्ञानों जैसे-कम्प्यूटर विज्ञान, नेटवर्किंग, सॉफ्टवेयर विकास, व्यवसाय एवं वाणिज्य, कृषि विज्ञान इत्यादि सभी क्षेत्रों में उपाधि प्राप्त करने हेतु शिक्षार्थी को गणित एवं सांख्यिकी का ज्ञान होना आवश्यक है। उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित सीखना आपको इन क्षेत्रों में रोजगार के चयन में मदद करेगा।



विषय सूची

मॉड्यूल I

अंकगणित

प्राचीन काल में मानव अपने पशुओं और व्यक्तिगत वस्तुओं को गिनने के लिए मिलान चिह्न, पत्थर के टुकड़ों अथवा धागे में गांठों को प्रयोग में लाता था। तत्पश्चात् वस्तुओं को गिनने के लिए संख्याओं, जिन्हें गणना की संख्याएं अथवा प्राकृत संख्याएं कहते हैं, का आविष्कार किया गया। विभिन्न सभ्यताओं ने इन गणना की संख्याओं को निरूपित करने के लिए, अलग-अलग चिह्नों (संख्यांक कहलाने वाले) के समूहों का विकास किया।

कुछ सभ्यताओं द्वारा गणना की पहली दस संख्याओं और संख्या सौ को लिखने के लिए निम्नलिखित संख्याकों का प्रयोग किया:

रोमन :	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
मिश्र :	I	II	III	IIII	IIIII	IIIIII	IIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIII	∩	𓍢
देवनागरी :	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	१००
हिंदू-अरबी : (अंतर्राष्ट्रीय)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100

हिंदू-अरबी पद्धति का विकास भारत में हुआ और फिर इसे अरब और यूरोप में अपनाया गया। भारतीय लोगों ने संख्या शून्य और स्थानीय मान के सिद्धांत की खोज की और इसका श्रेय भारत को ही जाता है। इस प्रकार हिंदू-अरबी गणना की दशमलव पद्धति, जिसमें दस चिह्नों (प्रतीक)

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का प्रयोग होता है, स्थापित हुई। इन दस चिह्नों के प्रयोग से, किसी भी संख्या को, जो कितनी ही बड़ी क्यों न हो, लिखा जा सकता है। अंकगणित के इस मॉड्यूल में हम प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों का वर्णन करेंगे। हम इन संख्याओं के संदर्भ में जोड़ने, घटाने, गुणा करने और भाग देने की चार मौलिक संक्रियाओं और इनके मूलभूत गुणधर्मों का भी अध्ययन करेंगे।

संख्याओं के गुणनखंड, गुणज, संख्याओं के लघुत्तम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्तक, अभाज्य संख्याओं, संयुक्त संख्याओं, सह-अभाज्य संख्याओं के युग्म, इन सभी संकल्पनाओं का वर्णन भी इस मॉड्यूल में है। किसी प्राकृत संख्या की 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 अथवा 11 से विभाज्यता के परीक्षणों का वर्णन और इनके प्रयोग से किसी संख्या की विभाज्यता की जांच करना भी वर्णित किया गया है।

आप, संख्या रेखा पर प्राकृत, पूर्ण तथा पूर्णांक संख्याओं को निरूपित करना भी इसी मॉड्यूल में सीखेंगे।

1

प्राकृत तथा पूर्ण संख्याएं

आपके घर में किसी शुभ अवसर पर कुछ अतिथि आने हैं और आपने उनके रात को सोने के लिए बिस्तर लगवाने हैं। यदि आप गिनती नहीं जानते तो बहुत कठिनाई होगी। आप अतिथियों के घर पहुंचने से पहले नहीं जान पाएंगे कि आपका प्रबंध पर्याप्त है अथवा नहीं। इस प्रकार की कठिनाइयों को दूर करने के लिए मनुष्य ने गणना की संख्याओं, जिन्हें प्राकृत संख्याएं कहते हैं, का आविष्कार किया। गणना की संख्याओं के समूह में यदि संख्या शून्य को भी ले लें तो हमें पूर्ण संख्याओं का समूह प्राप्त होता है। तत्पश्चात् मनुष्य ने प्राकृत तथा पूर्ण संख्याओं को जोड़ना, घटाना, गुणा करना और भाग देना भी सीखा और इन संक्रियाओं के गुणधर्म भी सीखे।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- प्राकृत तथा पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएं एवं उनके गुणधर्म
- संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (म.स.) और लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.)
- संख्याओं की भाज्यता

1.1 प्राकृत संख्याएं तथा पूर्ण संख्याएं

हम जानते हैं कि गिनती की संख्या 1, 2, 3, 4, ...को प्राकृत संख्याएं कहते हैं। इनमें यदि शून्य (0) को भी ले लिया जाए तो इस प्रकार के बने संख्या समूह को पूर्ण संख्याएं कहते हैं।

दो प्राकृत संख्याओं के जोड़ने, घटाने, गुणा तथा भाग करने की विधि को हम जानते हैं। आइए, इन संक्रियाओं के गुणों का अध्ययन करें।

1.1.1 संकलन या जोड़

हमें पता है कि $7 + 8 = 15$

$12 + 6 = 18$

$55 + 43 = 98$

हम देखते हैं कि 15, 18, 98 भी प्राकृत संख्याएं हैं। अतः निष्कर्ष निकला कि यदि दो प्राकृत संख्याओं को जोड़ा जाए तो योगफल भी एक प्राकृत संख्या होगी। व्यापक रूप से यदि a तथा b दो प्राकृत संख्याएं हों तो $(a + b)$ भी एक प्राकृत संख्या होगी।

माना नरेश के पास दो पैंसिल तथा अरुण के पास तीन पैंसिल हैं। यदि नरेश अपनी 2 पैंसिल अरुण को दे दे, तो अरुण के पास 5 पैंसिलें होंगी (अर्थात् $2 + 3 = 5$), परंतु यदि अरुण अपनी तीन पैंसिल नरेश को दे दे, तो नरेश के पास 5 पैंसिल होंगी, क्योंकि $(3 + 2 = 5)$

पुन: $4 + 8 = 12$ तथा $8 + 4 = 12$, अत: $4 + 8 = 8 + 4$

$47 + 33 = 80$ तथा $33 + 47 = 80$, अत: $47 + 33 = 33 + 47$

अत: निष्कर्ष निकलता है कि दो संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ने पर योगफल समान रहेगा। व्यापक रूप से यदि a तथा b दो प्राकृत संख्याएं हैं तो $a + b = b + a$

यदि हमें तीन प्राकृत संख्याओं का योग करना हो तो पहले दो प्राकृत संख्याओं के योग में तीसरी संख्या का योग किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि 3, 5 तथा 7 का योग करना हो तो योग निम्नलिखित प्रकार से करते हैं

$$3 + 5 + 7 = (3 + 5) + 7 = 8 + 7 = 15$$

यहां कोष्ठक यह संकेत देता है कि कोष्ठक में लिखी संख्याओं का योग पहले करके योगफल में तीसरी संख्या जोड़ी जाए।

यदि 5 तथा 7 को पहले जोड़ा जाए और योगफल में 3 जोड़ा जाए तो

$$3 + 5 + 7 = 3 + (5 + 7) = 3 + 12 = 15$$

योगफल पहले जितना ही प्राप्त हुआ। आइए, इसकी जांच अन्य प्राकृत संख्याएं लेकर करें।

$$(1 + 3) + 8 = 4 + 8 = 12$$

$$1 + (3 + 8) = 1 + 11 = 12$$

अत: $(1 + 3) + 8 = 1 + (3 + 8)$

व्यापक रूप से $(a + b) + c = a + (b + c)$, जबकि a, b, c प्राकृत संख्याएं हैं।

कभी-कभी इस गुण का प्रयोग योग को आसान करने में किया जाता है।

उदाहरण के लिए 235, 233 तथा 367 का योग ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} 235 + 233 + 367 &= 235 + (233 + 367) \\ &= 235 + 600 \\ &= 835 \end{aligned}$$

यदि इसमें 235 + 233 को पहले जोड़ा जाए तथा योगफल में 367 जोड़ा जाए तो योग ज्ञात करना कुछ कठिन होगा।

उदाहरण 1.1 : 325 + 467 + 175 का योगफल ज्ञात कीजिए

हल : 325 + 467 + 175 = (325 + 175) + 467

= 500 + 467

= 967

उदाहरण 1.2 : 517 + 473 + 527 का योगफल ज्ञात कीजिए

हल : 517 + 473 + 527 = 517 + (473 + 527)

= 517 + 1000

= 1517

देखें आपने कितना सीखा 1.1

1. निम्नलिखित में प्रत्येक का योग ज्ञात कीजिए तथा संख्याओं का क्रम उलटकर योग की जांच कीजिए:

   (i) 573, 617 (ii) 2145, 1355

   (iii) 243, 357 (iv) 12345, 34521

2. रिक्त स्थान इस प्रकार भरें कि निम्नलिखित में प्रत्येक कथन सत्य हो जाए:

   (i) 105 + 513 = ... + 105

   (ii) 345 + (118 + 202) = (345 + ...) + 202

   (iii) (108 + 413) + 517 = (517 + ...) + 413

   (iv) 2344 + (1432 + 4224) = (1432 + 2344) + ...

3. 15, 27, 58 को सभी संभव समूह बनाकर योग ज्ञात कीजिए।

4. उचित क्रम में लिखकर निम्नलिखित का योग इस प्रकार करें कि योग क्रिया आसान बन जाए

   (i) 537, 368, 463 (ii) 2493, 3676, 1324

1.2 व्यवकलन (घटा)

व्यवकलन (घटा) योग की विपरीत क्रिया है। इसमें हम वस्तुओं के एक समूह को दिए गए दूसरे समूह से घटाते हैं। अत: यह स्पष्ट है कि एक छोटे समूह की वस्तु संख्या को बड़े समूह की वस्तु संख्या से घटाया जा सकता है। उदाहरण के लिए 78 – 43 = 35

वास्तव में, 78 में से 43 घटाने का अर्थ, एक ऐसी संख्या प्राप्त करना है, जिसको 43 में जोड़ा जाए तो 78 प्राप्त हो।

अतः 78 – 43 = 35 को 43 + 35 = 78 लिखा जा सकता है।

आइए व्यवकलन (घटा) के गुणधर्मों का अध्ययन करें।

24 – 8 = 16, 47 – 17 = 30, 258 – 143 = 115

16, 30, 115 सभी प्राकृत संख्याएं हैं। क्या हम यह कह सकते हैं कि किन्हीं दो प्राकृत संख्याओं का व्यवकलन सदैव एक प्राकृत संख्या होगी? स्पष्ट है कि ऐसी कोई प्राकृत संख्या नहीं, जिसको 27 में जोड़कर 15 प्राप्त हो। अतः 15 – 27 प्राकृत संख्या नहीं है।

अतः दो प्राकृत संख्याओं को घटाने पर एक प्राकृत संख्या प्राप्त होगी, यदि घटाई जाने वाली संख्या दूसरी संख्या से छोटी है।

उदाहरण 1.3 : निम्न में व्यवकलन क्रिया कीजिए। संगत योग द्वारा अपने परिणाम की पुष्टि कीजिए।

(i) 3251 – 539

(ii) 987654 – 78937

हल : (i) 3251 – 539 = 2712

जांच 539 + 2712 = 3251

(ii) 987654 – 78937 = 908717

जांच 78937 + 908717 = 987654

उदाहरण 1.4 : 7 अंकों की छोटी से छोटी संख्या तथा 5 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या का अंतर ज्ञात कीजिए।

हल : 7 अंकों की छोटी से छोटी संख्या = 1000000

5 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या = 99999

अतः अंतर = 1000000 – 99999 = 900001

उदाहरण 1.5 : 5000 रुपये की राशि में से मैंने 1200 रुपये बिजली के बिल के, 500 रुपये अपने बच्चे की स्कूल फीस के तथा 1800 रुपये दूध वाले को दिए। मेरे पास कितना धन बचा?

हल : कुल खर्च = (1200 + 500 + 1800) रुपये

= 3500 रुपये

∴ बचा हुआ धन = (5000 – 3500) रुपये

= 1500 रुपये

देखें आपने कितना सीखा 1.2

1. निम्नलिखित में व्यवकलन क्रिया करो तथा अपने उत्तर की संगत योग द्वारा जांच कीजिए:

   (i) 97 – 54 (ii) 576 – 247

   (iii) 4276 – 1352 (iv) 59432 – 27654

2. 6 अंकों की छोटी से छोटी संख्या तथा 4 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या में अंतर ज्ञात कीजिए।

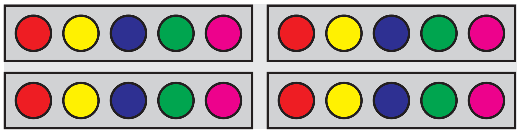
3. गाय, भैंसों और भेड़ों के एक समूह में 536 पशु हैं। यदि भैंसों की संख्या 218 और गायों की संख्या 79 हो, तो भेड़ों की संख्या ज्ञात कीजिए।

1.3 गुणा

आइए, हम 4 बक्से लें, जिनमें प्रत्येक में 5 गेंद हैं।

गेंदों की कुल संख्या = 5 + 5 + 5 + 5 = 20

ऊपर दी गई आवर्ती जमा को 5 का 4 गुना या 4 × 5 = 20 भी लिखा जा सकता है।



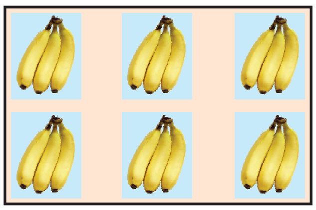
चित्र 1.1

इसी प्रकार, यदि आपके पास 3 केलों वाले 6 गुच्छे हों, तो केलों की कुल संख्या = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18

जिसे 6 × 3 = 18 द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है।

अत: हम यह कह सकते हैं कि गुणा, आवर्ती योग है।

अब हम प्राकृत संख्याओं में गुणा के गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे।



चित्र 1.2

हम जानते हैं कि

7 × 6 = 42

15 × 10 = 150

27 × 12 = 324

क्योंकि 42, 150 और 324 प्राकृत संख्याएं हैं,

अतः यदि a और b प्राकृत संख्याएं हैं तो $a \times b$ भी प्राकृत संख्या होगी।

पुनः निम्नलिखित का अवलोकन कीजिए:

$3 \times 4 = 12$ तथा $4 \times 3 = 12$ $\therefore$ $3 \times 4 = 4 \times 3$

$11 \times 8 = 88$ तथा $8 \times 11 = 88$ $\therefore$ $11 \times 8 = 8 \times 11$

$23 \times 12 = 276$ तथा $12 \times 23 = 276$ $\therefore$ $23 \times 12 = 12 \times 23$

हम देखते हैं कि गुणा में क्रम का कोई महत्व नहीं।

अर्थात् $a \times b = b \times a$

आइए, हम तीन प्राकृत संख्याओं को गुणा करें। इसे दो विधियों से किया जा सकता है।

(i) $5 \times 7 \times 6 = (5 \times 7) \times 6 = 35 \times 6 = 210$

(ii) $5 \times 7 \times 6 = 5 \quad (7 \times 6) = 5 \times 42 = 210$

अतः $(5 \times 7) \times 6 = 5 \times (7 \times 6)$

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं:

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ जबकि a, b, c प्राकृत संख्याएं हैं।

पुनः हम जानते हैं कि

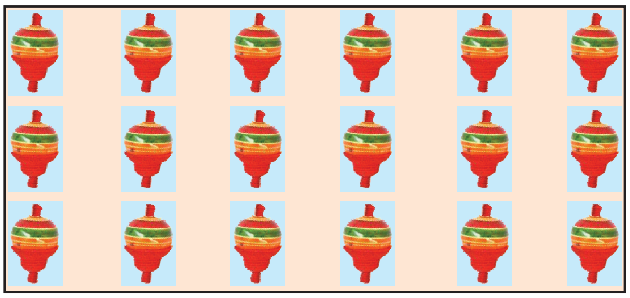
$9 \times 1 = 9$, $15 \times 1 = 15$, $27 \times 1 = 27$, $93 \times 1 = 93$

अर्थात् किसी प्राकृत संख्या को यदि 1 से गुणा किया जाए तो वही संख्या प्राप्त होती है।

व्यापक रूप में, यदि a एक प्राकृत संख्या है तो,

$a \times 1 = 1 \times a = a$

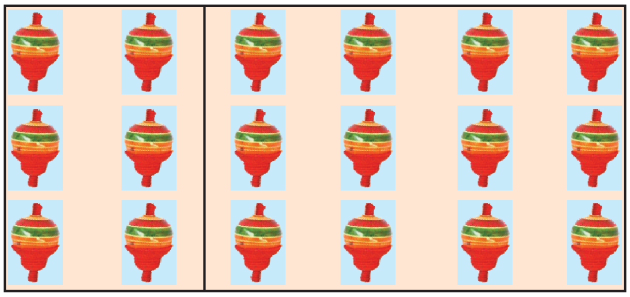
अब हम निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें, जिसमें $3 \times 6 = 18$ को दर्शाया गया है



$3 \times 6 = 18$

चित्र 1.3

अब यदि हम कागज को इस प्रकार मोड़ लें कि मोड़ने वाली रेखा पंक्ति को इसमें बदल दें, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :



चित्र 1.4

$3 \times 2 = 6$ एवं $3 \times 4 = 12$

इससे हम देखते हैं कि

$3 \times 6 = 3 \times (2 + 4) = 3 \times 2 + 3 \times 4$

किन्हीं प्राकृत संख्याओं a, b और c के लिए $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

हम इस गुणधर्म की सत्यता को एक और उदाहरण लेकर देखते हैं।

$4 \times (5 + 6) = 4 \times 11 = 44$

और $\quad 4 \times 5 + 4 \times 6 = 20 + 24 = 44$

$\therefore \quad 4 \times (5 + 6) = 4 \times 5 + 4 \times 6$

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि

$5 \times (8 - 3) = 5 \times 8 - 5 \times 3, \qquad 12 \times (15 - 3) = 12 \times 15 - 12 \times 9$

हम इस गुणधर्म का प्रयोग गुणा करते समय इस प्रकार करते हैं:

$$\begin{aligned} 86 \times 43 &= 86 \times (40 + 3) \\ &= 86 \times 40 + 86 \times 3 \\ &= 3440 + 258 \\ &= 3698 \end{aligned}$$

इस प्रक्रिया को इस प्रकार भी दर्शाया जा सकता है:

$$\begin{array}{r} 8\ 6 \\ \times\ 4\ 3 \\ \hline 2\ 5\ 8 \\ 3\ 4\ 4\ 0 \\ \hline 3\ 6\ 9\ 8 \\ \hline \end{array}$$

3 से गुणा करने पर
40 से गुणा करने पर

परिणामों का योग करने पर 3698 हुआ

अतः $86 \times 43 = 3698$

उदाहरण 1.6 : मान ज्ञात कीजिए: $798 \times 65 + 798 \times 35$

हल : $798 \times 65 + 798 \times 35 = 798 \times (65 + 35)$

$= 798 \times 100$

$= 79800$

उदाहरण 1.7 : मान ज्ञात कीजिए: $2357 \times 143 - 43 \times 2357$

हल : $2357 \times 143 - 43 \times 2357 = 2357 \times 143 - 2357 \times 43$

$= 2357 \times (143 - 43)$

$= 2357 \times 100$

$= 235700$

उदाहरण 1.8 : गुणनफल ज्ञात कीजिए: 725×94

हल : $725 \times 94 = 725 \times (100 - 6)$

$= 725 \times 100 - 725 \times 6$

$= 72500 - 4350$

$= 68150$

देखें आपने कितना सीखा 1.3

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (i) $247 \times$ ..... $= 33 \times 247$

   (ii) $12 \times 45 \times 97 = 97 \times$ ..... $\times 45$

   (iii) $578 \times 1 = 1 \times$ .....

   (iv) $57 \times 36 = 57 \times 30 + 57 \times$ .....

   (v) $213 \times 37 = 213 \times 40 - 213 \times$ .....

2. गुणधर्मों का प्रयोग करते हुए मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $344 \times 6 + 344 \times 4$

   (ii) $247 \times 17 - 247 \times 7$

   (iii) $1025 \times 1275 - 275 \times 1025$

   (iv) $239 \times 6 + 239 \times 3 + 239$

3. सुगम क्रम बनाकर गुणनफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $4 \times 1527 \times 25$

   (ii) $125 \times 278 \times 8$

   (iii) $250 \times 37 \times 4$

4. गुणधर्मों का प्रयोग करते हुए गुणनफल ज्ञात कीजिए:

   (i) 273×51

   (ii) 3045×99

1.4 भाग

हम एक प्राकृत संख्या को एक छोटी (अथवा समान) प्राकृत संख्या से भाग देने की क्रिया को जानते हैं। अब हम भाग क्रिया के गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे।

1. यदि हमें 20 खिलौनों को 5 बच्चों में बराबर-बराबर बांटना हो तो हम प्रत्येक बच्चे को 4 खिलौने दे सकते हैं, क्योंकि $20 \div 5 = 4$

   परंतु यदि हमारे पास 21 खिलौने हों तो हम इन्हें 5 बच्चों में बराबर-बराबर बांटना चाहते हों तो क्या हम ऐसा कर सकते हैं? हम ऐसा नहीं कर सकते।

   $\therefore$ 21, 5 से पूर्णतया विभाजित नहीं है।

   अत: प्राकृत संख्याओं में भाग संभव भी है और संभव नहीं हो, ऐसा भी हो सकता है।

2. देखो : $45 \div 15 = 3$ (एक प्राकृत संख्या)

   परंतु $15 \div 45$ एक प्राकृत संख्या नहीं है।

   $\therefore 45 \div 15 \neq 15 \div 45$

व्यापक रूप में, दो प्राकृत संख्याओं a और b के लिए

$a \div b \neq b \div a$

3. हम जानते हैं कि $24 \div 6 = 4$, $4 \times 6 = 24$

व्यापक रूप में, यदि a, b और c प्राकृत संख्याएं हैं, $a \div b = c$ तब $b \times c = a$

पुन: यदि 25 को 6 से भाग देना हो तो

या $25 = 6 \times 4 + 1$

अत: भाजक) भाज्य (भागफल

                   ....

                   शेष

भाज्य = भाजक $\times$ भागफल + शेष

उदाहरण 1.9 : 3475 को 234 से भाग दीजिए और परिणाम की गुणा द्वारा जांच कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l} 234\ ) & \overline{3475}\ (14 \\ & -234 \\ \hline & 1135 \\ & -936 \\ \hline & 199 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ 3475 को 234 से भाग देने पर भागफल 14 तथा शेषफल 199 है

जांच $234 \times 14 + 199 = 3276 + 199$

$= 3475 =$ भाज्य

देखें आपने कितना सीखा 1.4

1. भाग दीजिए और उत्तर की जांच कीजिए:

   (i) $3345 \div 15$ (ii) $9457 \div 43$

2. निम्न के मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $241 + (790 \div 79)$

   (ii) $(73 \div 73) + 45$

   (iii) $347 - (249 \div 249)$

   (iv) $(3125 \div 25) \div 25$

3. 16 घड़ियों का क्रय मूल्य 14400 रुपये है। एक घड़ी का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

1.5 पूर्ण संख्याओं में संक्रियाओं के गुणधर्म

हम जानते हैं कि जब एक प्राकृत संख्या को स्वयं में से घटाया जाए तो हम संख्या शून्य प्राप्त करते हैं, जो कि प्राकृत संख्या नहीं हैं। प्राकृत संख्याओं तथा शून्य को पूर्ण संख्याएं कहते हैं।

1. प्राकृत संख्याओं में संक्रियाओं के गुणधर्म पूर्ण संख्याओं में भी सत्य हैं।

2. शून्य एक विशेष संख्या है तथा इसकी ओर ध्यान देना आवश्यक है।

किसी पूर्ण संख्या a के लिए,

(i) $a + 0 = 0 + a = a$

(ii) $a - 0 \neq 0 - a$

(iii) $a \times 0 = 0 \times a = 0$

(iv) $a \div 0$ परिभाषित नहीं है, क्योंकि कोई ऐसी पूर्ण संख्या नहीं है, जिसे शून्य से गुणा करने पर a प्राप्त हो।

देखें आपने कितना सीखा 1.5

1. सबसे छोटी पूर्ण संख्या लिखिए। क्या आप सबसे बड़ी पूर्ण संख्या लिख सकते हैं?

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (a) $473 + 0 =$ .....

   (b) $473 - 0 =$ .....

   (c) $473 \times 0 =$ .....

   (d) $473 \div 0 =$ .....

   (e) $(425 \times 1575) \times 0 =$ .....

1.6 गुणनखंड और गुणज

हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned} 18 &= 1 \times 18 \\ &= 2 \times 9 \\ &= 3 \times 6 \end{aligned}$$

1, 2, 3, 6, 9, 18 ऐसी संख्याएं हैं कि यदि इनमें से किसी से 18 को भाग दिया जाए तो शेष शून्य प्राप्त होता है।

अत: संख्याएं 1, 2, 3, 6, 9, 18 संख्या 18 के गुणनखंड कहलाते हैं।

तथा संख्या 18, संख्याओं 1, 2, 3, 6, 9, 18 का एक गुणज कहलाता है।

इसी प्रकार संख्याएं 1, 3, 5, 15 संख्या 15 के गुणनखंड हैं तथा संख्या 15 स्वयं 1, 3, 5, 15 का एक गुणज है।

अत: एक प्राकृत संख्या का गुणनखंड वह संख्या होती है, जो इसे पूरा-पूरा भाग करती है तथा एक प्राकृत संख्या अपने प्रत्येक गुणनखंड का गुणज कहलाती है।

अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि –

(i) 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखंड है या प्रत्येक संख्या 1 का गुणज है।

(ii) प्रत्येक संख्या स्वयं का गुणनखंड होती है और स्वयं का गुणज भी होती है।

2 के सभी गुणज सम संख्याएं कहलाती हैं।

2, 4, 6, 8, 10 ..... सम संख्याएं हैं तथा वे संख्याएं, जो 2 का गुणज नहीं होती, विषम संख्याएं कहलाती हैं।

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ..... सभी विषम संख्याएं हैं।

उदाहरण 1.10 : सम तथा विषम संख्याओं को अलग-अलग कीजिए:

1, 12, 14, 19, 44, 159, 240, 3451, 4437, 135792

हल : सम संख्याएं : 12, 14, 44, 240, 135792

विषम संख्याएं : 1, 19, 159, 3451, 4437

टिप्पणी : यदि संख्या में इकाई के स्थान पर 2, 4, 6, 8 या 0 हो तो ऐसी संख्याएं सम संख्याएं होती हैं। निम्नलिखित संख्याओं तथा इनके गुणनखंडों का अवलोकन कीजिए:

संख्या	**गुणनखंड**
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6
7	1, 7
8	1, 2, 4, 8
9	1, 3, 9
10	1, 2, 5, 10

हम देखते हैं कि संख्याओं 2, 3, 5, 7 के केवल दो गुणनखंड होते हैं। ऐसी संख्याओं को अभाज्य संख्याएं कहते हैं।

संख्याओं 4, 6, 8, 9, 10 ..... के 2 से अधिक गुणनखंड हैं। ऐसी संख्याओं को संयुक्त संख्याएं कहते हैं। संख्या 1 का केवल एक गुणनखंड है। इसलिए यह न तो अभाज्य संख्या है और न ही संयुक्त संख्या।

टिप्पणी : संख्या 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है तथा केवल एक ही सम अभाज्य संख्या है।

टिप्पणी

उदाहरण 1.11 : 1 और 50 के बीच की सभी अभाज्य संख्याएं लिखो।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

हम जानते हैं कि 1 अभाज्य संख्या नहीं है। अब 2 अभाज्य संख्या है। इसको गोला कर लीजिए। अब 2 के सभी गुणजों को काट दीजिए। 3 को गोला कर लीजिए। 3 के सभी गुणजों को काट दीजिए। इसी तरह 5, 7, ... के साथ क्रिया दोहराइए। हमारे पास 1 से 50 के बीच निम्न अभाज्य संख्याएं हैं:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

1.7 अभाज्य द्विक

जब दो अभाज्य संख्याओं में 2 का अंतर हो तो वह अभाज्य युग्म, अभाज्य द्विक कहलाता है।

कुछ अभाज्य द्विक निम्नलिखित हैं:

(i) 3, 5 (ii) 5, 7 (iii) 11, 13

(iv) 17, 19 (v) 29, 31 (vi) 41, 43 .....

एक प्रसिद्ध गणितज्ञ गोल्डबैच ने एक गुणधर्म दिया कि 4 से बड़ी प्रत्येक सम संख्या को दो विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ, $6 = 3 + 3$

$8 = 3 + 5$

$10 = 3 + 7$ या $5 + 5$

$12 = 5 + 7$

$14 = 3 + 11$ या $7 + 7$

$16 = 3 + 13$ या $5 + 11$

1.7.1 सह-अभाज्य संख्याएं

दो प्राकृत संख्याओं को सह-अभाज्य संख्याएं कहते हैं, यदि उनमें 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो।

उदाहरणार्थ,

(i) 2, 3 (ii) 2, 5 (iii) 3, 4

(iv) 3, 5 (v) 3, 7 (vi) 2, 7 (vii) 3, 8

उदाहरण 1.12 : निम्नलिखित में से प्रत्येक के गुणनखंड लिखिए:

(i) 24 (ii) 30 (iii) 65 (iv) 95

हल : (i) $24 = 1 \times 24$

$= 2 \times 12$

$= 3 \times 8$

$= 4 \times 6$

$\therefore$ 24 के गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 हैं।

(ii) $30 = 1 \times 30$

$= 2 \times 15$

$= 3 \times 10$

$= 5 \times 6$

$\therefore$ 30 के गुणनखंड 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 हैं।

(iii) $65 = 1 \times 65$

$= 5 \times 13$

$\therefore$ 65 के गुणनखंड 1, 5, 13, 65 हैं।

देखें आपने कितना सीखा 1.6

1. निम्न में प्रत्येक के सभी गुणनखंड लिखिए:

   (i) 50 (ii) 64 (iii) 144 (iv) 243

2. निम्न में प्रत्येक के पहले चार गुणज लिखिए:

   (i) 11 (ii) 18 (iii) 23 (iv) 49

3. जांच कीजिए कि क्या निम्नलिखित संख्याएं 27 से पूरा भाग होती हैं?

   (i) 72900 (ii) 2430 (iii) 54793 (iv) 13527

टिप्पणी

1.7.2 अभाज्य गुणनखंड

आइए, 36 के गुणनखंड बनाएं

$$36 = 2 \times 18$$
$$= 2 \times 2 \times 9$$
$$= 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

अत: हमने 36 के अभाज्य गुणनखंड बना लिए हैं। यह गुणनखंड विधि अभाज्य गुणनखंड विधि कहलाती है।

उदाहरण 1.13 : अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) 48 (ii) 120 (iii) 210 (iv) 440

हल : (i)

2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$\therefore \quad 48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

(ii)

2	120
2	60
2	30
3	15
5	5
	1

$\therefore \quad 120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

(iii)

2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$\therefore \quad 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

टिप्पणी

(iv)

2	440
2	220
2	110
5	55
11	11
	1

$\therefore \quad 440 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11$

ऊपर दिये गये उदाहरणों से हम देखते हैं कि प्रत्येक संयुक्त संख्या को अभाज्य गुणनखंड के गुणनफल के अद्वितीय रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

देखें आपने कितना सीखा 1.7

1. निम्न में से प्रत्येक के अभाज्य गुणनखंड लिखिए:

   (i) 12 (ii) 34 (iii) 56 (iv) 98

   (v) 136 (vi) 945 (vii) 540 (viii) 7325

2. 5 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या लिखकर इसे अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

3. 4 अंकों की छोटी से छोटी संख्या लिखिए और इसे अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

1.8 महत्तम समापवर्तक (म. स.) और लघुत्तम समापवर्त्य (ल. स.)

16 के गुणनखंड हैं : 1, 2, $\boxed{4}$, 8, 16

और 36 के गुणनखंड हैं : 1, 2, 3, $\boxed{4}$, 6, 9, 12, 18, 36

16 और 36 के उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं = 1, 2 और 4

$\therefore$ म. स. = 4

दो या अधिक संख्याओं का म. स. वह संख्या होती है, जो उन संख्याओं के उभयनिष्ठ गुणनखंडों में सबसे बड़ी होती है।

दो संख्याओं का म. स. ज्ञात करने की दूसरी विधि उन संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों के रूप में व्यक्त करने के बाद सभी उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल ज्ञात करना है। प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड को कम से कम बार लेना है।

उदारहण के लिए,

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

टिप्पणी

हम देखते हैं कि अभाज्य गुणनखंड 2, कम से कम 2 बार प्रत्येक गुणनफल में आता है।

$\therefore$ म. स. $= 2 \times 2 = 4$

भाग विधि द्वारा म.स. ज्ञात करना:

भाग विधि से म.स. दो तरीके से ज्ञात किया जा सकता है–

प्रथम विधि:

उदाहरण के लिए,

16 तथा 36 का म.स. ज्ञात करना है तो

2	16, 36
2	8, 18
	4, 9

- सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 से 16 तथा 36 को भाग देते हैं।
- फिर 2 से 8 तथा 18 को भाग देते हैं।
- अब 4 तथा 9 को किसी अभाज्य संख्या से भाग देना संभव नहीं है।

इसलिए जिन अभाज्य संख्याओं से दी गई सभी संख्याओं में एक साथ भाग दिया जा सकता है, उनका गुणनफल ही म.स. होगा।

अत: 16 और 36 का महत्तम समापवर्तक $= 2 \times 2 = 4$

एक अन्य उदाहरण की सहायता से समझते हैं–

यदि 60, 90 तथा 210 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना है, तो

2	60, 90, 210
3	30, 45, 105
5	10, 15, 35
	2, 3, 7

- 2 से 60, 90 तथा 210 को भाग देने पर
- 3 से 30, 45, 105 को भाग करने पर
- 5 से 10, 15, 35 को भाग करने पर

अब चूंकि 2, 3 तथा 7 को किसी अन्य अभाज्य संख्या से एक साथ भाग देना संभव नहीं है, अत: 60, 90 तथा 210 का महत्तम समापवर्तक $= 2 \times 3 \times 5 = 30$

1.8.1 लघुत्तम समापवर्त्य (ल. स.)

हम जानते हैं कि दो संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य वह छोटी से छोटी संख्या है, जो प्रत्येक संख्या का गुणज होगी अर्थात् जो प्रत्येक से भाग होती है। उदाहरण के लिए, यदि हमें 12 और 16 का ल. स. ज्ञात करना हो तो हम इनके गुणजों को इस प्रकार लिखते हैं–

12 के गुणज हैं : 12, 24, 26, $\boxed{48}$, 60, 72, 84, $\boxed{96}$, ...

16 के गुणज हैं : 16, 32, $\boxed{48}$, 64, 80, $\boxed{96}$, 112, ...

12 और 16 के उभयनिष्ठ गुणज है : 48, 96, ...

$\therefore$ 12 और 16 का छोटे से छोटा उभयनिष्ठ गुणज = 48

$\therefore$ ल. स. = 48

दो संख्याओं का ल.स. अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं:

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$\therefore$ ल. स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

अर्थात् पहले सभी उभयनिष्ठ गुणनखंड लेकर उनको दोनों संख्याओं के बचे हुए गुणनखंडों से गुणा कर लो।

भाग विधि से लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करना

भाग विधि से ल.स. ज्ञात करने हेतु-

- सर्वप्रथम कम से कम दो संख्याओं में उभयनिष्ठ सबसे छोटी अभाज्य संख्या से सभी संख्याओं में भाग देते हुए भागफल उन संख्याओं के ठीक नीचे उतार लेते हैं।
- जिस संख्या में भाग नहीं जाता है, उसे उसके नीचे ज्यों का त्यों उतार लेते हैं।
- इस क्रिया को तब तक करते जाते हैं, जब तक सभी संख्याओं के नीचे सह-अभाज्य संख्याएं न आ जाएं।

इस प्रकार प्राप्त सभी भाजक संख्याओं तथा अंतिम पंक्ति की सह-अभाज्य संख्याओं का परस्पर गुणा करके अभीष्ट ल.स. प्राप्त करते हैं, जैसे-

12, 16 तथा 24 का ल.स. ज्ञात करने के लिए-

2	12, 16, 24	2 का भाग तीनों संख्याओं में जाता है।
2	6, 8, 12	2 का भाग तीनों संख्याओं में जाता है।
2	3, 4, 6	2 का भाग दो संख्याओं में जाता है।
2	3, 2, 3	2 का भाग एक संख्या में जाता है।
3	3, 1, 3	3 का भाग दो संख्याओं में जाता है।
	1, 1, 1	

समस्त भाजक संख्याओं का गुणनफल ल.स. है, अत: 12, 16 और 24 का ल.स.

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$= 48$

एक अन्य उदाहरण की सहायता से समझें

यदि 16, 32 तथा 64 का ल.स. ज्ञात करना हो तो–

2	16, 32, 64
2	8, 16, 32
2	4, 8, 16
2	2, 4, 8
2	1, 2, 4
2	1, 1, 2
	1, 1, 1

अत: 16, 32 तथा 64 का ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 64$

एक अन्य उदाहरण समझिए:

6 घंटियां एक साथ बजना प्रारंभ करती हैं, यदि वे क्रमश: 2, 4, 6, 8, 10 तथा 12 सेकेंड के अंतराल में बजती है तो वे एक साथ कितनी देर बाद बजेगी?

घंटिया कितनी देर बाद बजेंगी का पता लगाने के लिए ल.स. ज्ञात करना होगा। अत:

2	2, 4, 6, 8, 10, 12
2	1, 2, 3, 4, 5, 6
3	1, 1, 3, 2, 5, 3
2	1, 1, 1, 2, 5, 1
5	1, 1, 1, 1, 5, 1
	1, 1, 1, 1, 1, 1

अत: 2, 4, 6, 8, 10 तथा 12 का ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 120$

अत: सभी घंटियाँ एक साथ 120 सेकेंड या 2 मिनट बाद बजेगी।

अब संख्याओं 60 और 84 के लिए, इनके म.स. तथा ल.स. में सम्बन्ध स्थापित करके देखें

$$60 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times 5$$

और $$84 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times 7$$

$\therefore$ म.स. $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

ल.स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

अब $60 \times 84 = 5040$

और (ल. स.) $\times$ (म. स.) $= 420 \times 12 = 5040$

$\therefore$ दो संख्याओ का गुणनफल = इनके म. स. और ल. स. का गुणनफल

अतः दो प्राकृत संख्याओं के लिए

(i) म. स. $= \dfrac{\text{दो संख्याओं का गुणनफल}}{\text{ल. स.}}$

(ii) ल. स. $= \dfrac{\text{दो संख्याओं का गुणनफल}}{\text{म. स.}}$

उदाहरण 1.14 : 234 और 592 का म. स. और ल. स. ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं

$$234 = 2 \times 3 \times 3 \times 13$$

और $$592 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 37$$

$\therefore$ म. स. = 2

अब ल. स. $= \dfrac{234 \times 592}{2}$

$= 117 \times 592$

$= 69264$

उदाहरण 1.15 : दो संख्याओ का म. स. 128 है तथा इनका ल. स. 14976 है। यदि एक संख्या 1664 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

पहली संख्या $\times$ दूसरी संख्या = म. स. $\times$ ल. स.

$$\therefore \quad \text{दूसरी संख्या} = \frac{\text{म. स.} \times \text{ल. स.}}{\text{पहली संख्या}}$$

$$= \frac{128 \times 14976}{1664}$$

$$= 1152$$

देखें आपने कितना सीखा 1.8

1. निम्न संख्याओं के म. स. ज्ञात कीजिए:

   (i) 60, 75 (ii) 36, 40 (iii) 36, 60, 72

   (iv) 144, 180, 384 (v) 276, 1242

   (vi) 625, 3125, 15625

2. निम्न संख्याओं के म. स. और ल. स. ज्ञात कीजिए तथा जांच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = ल. स. × म. स.

   (i) 145, 232 (ii) 117, 221 (iii) 27, 90
   (iv) 420, 660 (v) 135, 162

1.9 विभाज्यता के नियम

यह जानने के लिए कि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित होती है या नहीं, हमें वास्तविक भाग की संक्रिया करने की आवश्यकता नहीं होती। हमारे पास यह जांच करने के लिए कुछ नियम उपलब्ध हैं:

1.9.1 2 से विभाज्यता

यदि संख्या के इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 या 8 में से कोई अंक है तो यह संख्या 2 से विभाजित होती है। उदाहरण के लिए 31240, 43572, 98764, 83246, 97698 में से प्रत्येक संख्या 2 से विभाजित होती है।

1.9.2 3 से विभाज्यता

वह संख्या 3 से विभाजित होती है, जिसके अंकों का योग 3 से विभाजित होता हो। उदाहरण के लिए, संख्या 12639 के अंकों का योग 1 + 2 + 6 + 3 + 9 = 21, तीन से विभाजित होता है, इसलिए 12639 भी 3 से विभाजित होती है।

1.9.3 4 से विभाज्यता

वह संख्या 4 से विभाजित होती है, यदि इसके दहाई और इकाई के स्थानों के अंकों द्वारा बनी संख्या 4 से विभाजित होती है। उदाहरण के लिए संख्या 54764, 4 से विभाजित होती है,

क्योंकि 64, संख्या 4 से विभाजित होती है। संख्या 876952 संख्या 4 से विभाजित होती है, क्योंकि 52 संख्या 4 से विभाजित होती है। संख्या 1357642 को 4 से विभाजित नहीं कर सकते, क्योंकि 42 को 4 से विभाजित नहीं कर सकते।

1.9.4 5 से विभाज्यता

वह संख्या 5 से विभाजित होती है, यदि इसके इकाई के स्थान पर 0 या 5 हो। उदाहरण के लिए, संख्याएं 6215, 3570, 2495, 36840 संख्या 5 से विभाजित होती हैं।

1.9.5 6 से विभाज्यता

वह संख्या 6 से विभाजित होती है, यदि यह 2 और 3 दोनों से विभाजित होती है। उदाहरण के लिए 4320, संख्या 2 से विभाजित होती है (क्योंकि इसके इकाई के स्थान पर 0 है) तथा यह 3 से भी विभाजित होती ($4 + 3 + 2 = 9$, तीन से विभाजित होता है)। अत: 4320 संख्या 6 से विभाजित होती है।

1.9.6 8 से विभाज्यता

वह संख्या 8 से विभाजित होती है, यदि इसके सैकड़े, दहाई और इकाई के स्थान पर अंकों से बनी संख्या 8 से विभाजित होती हो। उदाहरण के लिए, 5690248 संख्या 8 से विभाजित होती है, क्योंकि 248 संख्या 8 से विभाजित होती है।

1.9.7 9 से विभाज्यता

वह संख्या 9 से विभाजित होती है, यदि इसके अंकों का योग 9 से विभाजित होता है। उदाहरण के लिए, 87642 संख्या 9 से विभाजित होती है, क्योंकि $8 + 7 + 4 + 6 + 2 = 27$, संख्या 9 से विभाजित होती है।

1.9.8 11 से विभाज्यता

वह संख्या 11 से विभाजित होती है, यदि इसके विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योग में अंतर 0 हो या 11 का गुणज हो। उदाहरण के लिए, संख्या 2080217062 के लिए 11 से विभाज्यता की जांच के लिए हम देखते हैं कि

सम स्थानों के अंकों का योग $= 6 + 7 + 2 + 8 + 2 = 25$

विषम स्थानों के अंकों का योग $= 2 + 0 + 1 + 0 + 0 = 3$

अंतर $= 25 - 3 = 22$

जो कि 11 से विभाजित होता है।

$\therefore$ संख्या 2080217062 संख्या 11 से विभाजित होती है।

देखें आपने कितना सीखा 1.9

1. विभाज्यता के नियमों द्वारा जांच कीजिए कि निम्न संख्याएं 2, 3, 5 या 9 से विभाजित होती हैं या नहीं :

   (i) 612 (ii) 276 (iii) 2650 (iv) 79124

   (v) 872645 (vi) 524781

2. निम्नलिखित संख्याओं के लिए 4 और 8 की विभाज्यता की जांच कीजिए:

   (i) 63712 (ii) 763452 (iii) 51342 (iv) 35056

   (v) 234976 (vi) 2971

3. निम्नलिखित संख्याओं के लिए 6 की विभाज्यता की जांच कीजिए:

   (i) 297144 (ii) 46523 (iii) 9087248

   (iv) 2070 (v) 35274 (vi) 93162

4. निम्नलिखित संख्याओं की 11 से विभाज्यता की जांच कीजिए:

   (i) 83721 (ii) 438750 (iii) 723405

   (iv) 3178965 (v) 70169803 (vi) 10000001

5. निम्नलिखित में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं?

   (i) सम संख्या 4 से विभाजित होती है।

   (ii) वह संख्या, जो 9 से विभाजित होती है, 3 से भी विभाजित होगी।

   (iii) वह संख्या, जो 6 से विभाजित होती है, 3 से भी विभाजित होगी।

   (iv) वह संख्या, जो 3 से विभाजित होती है, 9 से भी विभाजित होगी।

   (v) वह संख्या, जो 2 से विभाजित होती है, 6 से भी विभाजित होगी।

   (vi) वह संख्या, जो 3 और 5 दोनों से विभाजित होती है, 15 से भी विभाजित होगी।

   (vii) वह संख्या, जो 3 और 6 से विभाजित होती है, 18 से भी विभाजित होगी।

   (viii) वह संख्या, जो 8 से विभाजित होती है, 4 से भी विभाजित होगी।

आइए दोहराएं

1. यदि a, b, c पूर्ण संख्याएं हैं, तो

   - $a + b$ तथा $a \times b$ पूर्ण संख्याएं होंगी।

   - $a - b$ पूर्ण संख्या हो सकती है या नहीं भी हो सकती है।

- $a \div b$ पूर्ण संख्या हो सकती हैं या नहीं भी हो सकती है।
- $a + b = b + a$ और $a \times b = b \times a$

व्यापक रूप में, $a - b \neq b - a$, $a \div b \neq b \div a$

- $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- $a + 0 = 0 + a = a$, $a \times 0 = 0 \times a = 0$
- $a \times 1 = 1 \times a = a$

2. एक संख्या का गुणनखंड संख्या को पूरा विभाजित करता है।
   - एक संख्या का गुणज उस संख्या से पूरा विभाजित करता है।
   - संख्या 2 केवल एक ही सम अभाज्य संख्या है।
   - (म. स.) × (ल. स.) = संख्याओं का गुणनफल
   - दो या अधिक संख्याओं का म. स. उन संख्याओं के ल. स. का गुणनखंड होता है।

3. विभाज्यता

   एक संख्या

   - 2 से विभाजित होती है, यदि इसके इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 या 8 हो।
   - 3 से विभाजित होती है, यदि इसके अंकों का जोड़ 3 से विभाजित होता हो।
   - 4 से विभाजित होती है, यदि इसके दहाई और इकाई के अंकों द्वारा बनी संख्या 4 से विभाजित होती है।
   - 5 से विभाजित होती है, यदि इकाई का अंक 0 या 5 है
   - 6 से विभाजित होती है, यदि यह 2 और 3 दोनों से विभाजित होती है।
   - 8 से विभाजित होती है, यदि इसके सैकड़े, दहाई और इकाई के स्थानों वाले अंकों द्वारा बनी संख्या 8 से विभाजित होती है।
   - 9 से विभाजित होती है, यदि इसके अंकों का योग 9 से विभाजित होता हो।
   - 11 से विभाजित होती है, यदि इसके विषम स्थानों के अंकों के योग तथा सम स्थानों के अंकों के योग में अंतर 0 या 11 का गुणज हो।

आइए अभ्यास करें

1. कोई सुविधाजनक क्रम बनाकर योग ज्ञात कीजिए:

   (a) 3376 + 1808 + 2348 + 92 + 2652 + 1024

   (b) 6254 + 1297 + 446 + 103

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (i) $(400 + 7)(500 - 1) = 499 \times .....$

   (ii) $770 + 990 + 660 = 110 \times .....$

   (iii) $93 \times (100 - 9) = 91 \times (100 - .....)$

   (iv) $(25 + 5)(25 - 5) = 625 - .....$

3. निम्नलिखित कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं और कौन-कौन से कथन असत्य हैं?

   (i) प्रत्येक प्राकृत संख्या पूर्ण संख्या है।

   (ii) प्रत्येक पूर्ण संख्या प्राकृत संख्या है।

   (iii) शून्य एक ऐसी पूर्ण संख्या है, जिसे किसी संख्या में जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

   (iv) 1 एक ऐसी पूर्ण संख्या है, जिसे किसी संख्या से गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

   (v) एक पूर्ण संख्या को दूसरी पूर्ण संख्या से भाग करना सदा संभव है।

4. मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $3457 \times 648 + 3457 \times 230 + 122 \times 3457$

   (ii) $5641 \times 157 - 5641 \times 7 - 5641 \times 50$

5. गुणधर्मों का प्रयोग करते हुए मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $347 \times 7 + 347 \times 3$

   (ii) $2136 \times 159 - 2136 \times 59$

   (iii) $746 \times 10 \times 541 - 441 \times 7460$

6. 50 और 100 के बीच अभाज्य संख्याएं लिखिए।

7. 50 और 100 के बीच अभाज्य द्विक लिखिए।

8. निम्नलिखित की 11 से विभाज्यता की जांच कीजिए:

   (i) 9020814 (ii) 70169803 (iii) 618618

   (iv) 25926857 (v) 723715806

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 1.1

1. (i) 1190 (ii) 3500 (iii) 600 (iv) 46866
2. (i) 513 (ii) 118 (iii) 108 (iv) 4224
3. 100
4. (i) 1368 (ii) 7493

देखें आपने कितना सीखा 1.2

1. (i) 43 (ii) 329 (iii) 2924 (iv) 31778
2. 90001
3. 239

देखें आपने कितना सीखा 1.3

1. (i) 33 (ii) 12 (iii) 578 (iv) 6
   (v) 3
2. (i) 3440 (ii) 2470 (iii) 1025000 (iv) 2390
3. (i) 152700 (ii) 278000 (iii) 37000
4. (i) 13923 (ii) 301455

देखें आपने कितना सीखा 1.4

1. (i) 223, 0 (ii) 219, 40
2. (i) 251 (ii) 46 (iii) 346 (iv) 5
3. 900 रुपये

देखें आपने कितना सीखा 1.5

1. 0, नहीं
2. (a) 473 (b) 473 (c) 0
   (d) परिभाषित नहीं (e) 0

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 1.6

1. (i) 1, 2, 5, 10, 25, 50

   (ii) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

   (iii) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 36, 48, 72, 144

   (iv) 1, 3, 9, 27, 81, 243

2. (i) 11, 22, 33, 44

   (ii) 18, 36, 54, 72

   (iii) 23, 46, 69, 92

   (iv) 49, 98, 147, 196

3. 72900, 2430, 13527 संख्या 27 से विभाजित होती हैं

देखें आपने कितना सीखा 1.7

1. (i) $2 \times 2 \times 3$ (ii) 2×17 (iii) $2 \times 2 \times 2 \times 7$

   (iv) $2 \times 7 \times 7$ (v) $2 \times 2 \times 2 \times 17$ (vi) $5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$

   (vii) $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ (vi) $5 \times 5 \times 293$

2. $99999 = 3 \times 3 \times 11111$

3. $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

देखें आपने कितना सीखा 1.8

1. (i) 15 (ii) 4 (iii) 12 (iv) 12

   (v) 138 (vi) 625

2. (i) 29, 1160 (ii) 13, 1989 (iii) 9, 270 (iv) 60, 4620

   (v) 27, 810

देखें आपने कितना सीखा 1.9

1. (i) 612 : 2, 3 और 9 से विभाजित होती है, 5 से नहीं।

   (ii) 276 : 2 और 3 से विभाजित होती है, 5 और 9 से नहीं।

   (iii) 2650 : 2 और 5 से विभाजित होती है, 3 और 9 से नहीं।

   (iv) 79124 : 2 से विभाजित होती है, 3, 5 और 9 से नहीं।

   (v) 872645 : 5 से विभाजित होती है, 2, 3 और 9 से नहीं।

   (vi) 524781 : 3 और 9 से विभाजित होती है, 2 और 5 से नहीं।

2. (i) 4 और 8 से विभाजित होती है।
   (ii) 4 से विभाजित होती है, 8 से नहीं।
   (iii) 4 और 8 से विभाजित नहीं होती।
   (iv) 4 और 8 से विभाजित होती है।
   (v) 4 और 8 से विभाजित होती है।
   (vi) 4 और 8 से विभाजित नहीं होती।
3. (i) विभाजित होती है। (ii) विभाजित नहीं होती।
   (iii) विभाजित नहीं होती। (iv) विभाजित होती है।
   (v) विभाजित होती है। (vi) विभाजित होती है।
4. (i) विभाजित होती है। (ii) विभाजित नहीं होती।
   (iii) विभाजित नहीं होती। (iv) विभाजित नहीं होती।
   (v) विभाजित होती है। (vi) विभाजित होती है।
5. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) असत्य
   (v) असत्य (vi) सत्य (vii) असत्य (viii) सत्य

आइए अभ्यास करें

1. (a) 11300 (b) 8100
2. (i) 407 (ii) 22 (iii) 7 (iv) 25
   (v) 111
3. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य
   (v) असत्य
4. (i) 3457000 (ii) 564100
5. (i) 3470 (ii) 213600 (iii) 746000
6. 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97
7. 59, 61; 71, 73
8. (i) विभाजित होती है। (ii) विभाजित होती है।
   (iii) विभाजित होती है। (iv) विभाजित होती है।
   (v) विभाजित होती है।

2

पूर्णांक

पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाओं का अध्ययन करते समय हमने देखा कि एक संख्या को दूसरी संख्या में से घटाना सदैव संभव नहीं है, जैसे कि 15 – 17, 12 –15, 8 – 10 को किसी पूर्ण संख्या से व्यक्त नहीं किया जा सकता।

ऐसी संक्रियाओं को व्यक्त करने के लिए हमें संख्या पद्धति का विस्तार करने की आवश्यकता पड़ी।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- पूर्णांकों को संख्या रेखा पर निरूपित करना
- पूर्णांकों की क्रमबद्धता समझना।
- पूर्णांकों का निरपेक्ष मान निकालना
- पूर्णांकों पर संक्रियाएं तथा उनसे संबंधित गुणों की चर्चा करना

2.1 प्राकृत संख्याओं के लिए नई संख्या की रचना

1 के लिए हम रचना करते हैं –1 की (जिसे ऋण 1 कहते हैं) इस प्रकार कि 1 + (–1) = 0, इसलिए 1 और –1 एक-दूसरे के प्रतिलोम कहलाते हैं। इसी प्रकार 2 के लिए –2, 3 के लिए –3, 4 के लिए –4 इत्यादि की रचना करने से हमें संख्याओं का निम्न संग्रह प्राप्त होता है

0, 1, –1, 2, –2, 3, –3 ..... यह संख्याएं पूर्णांक (Integers) कहलाती हैं तथा संख्याएं 1, 2, 3, 4, ...धन पूर्णांक और –1, –2, –3, ...ऋण पूर्णांक कहलाती हैं। संख्या शून्य (0) केवल एक पूर्णांक है, जो कि न धनात्मक है और न ऋणात्मक है।

2.2 पूर्णांकों का संख्या रेखा पर निरूपण

हम जानते हैं कि ऋण पूर्णांक, धन पूर्णांकों के प्रतिलोम हैं, इसलिए संख्या रेखा पर इनका निरूपण विपरीत दिशाओं में किया जा सकता है, अर्थात् संख्या रेखा पर शून्य के दायीं ओर धन

टिप्पणी

पूर्णांकों तथा बायीं ओर को ऋण पूर्णांकों को निरूपित किया जाता है। आप देखें कि 2 तथा −2 शून्य के दायीं तथा बायीं ओर समान दूरी पर हैं।

चित्र 2.1

2.3 संख्या रेखा पर पूर्णांकों को क्रमबद्ध करना

आप जानते हैं कि +7 से +9 बड़ा है, क्योंकि संख्या रेखा पर +9 की दूरी +7 की तुलना में अधिक है। संख्या रेखा के दायीं ओर जो पूर्णांक 0 से जितनी अधिक दूरी पर होगा, उतना ही बड़ा होगा। इसके विपरीत 0 से बायीं ओर जो पूर्णांक 0 से जितनी अधिक दूरी पर होगा, उतना ही छोटा होगा।

चित्र 2.2

$+5 > +3$ क्योंकि +3 की तुलना में +5 शून्य के दायीं ओर अधिक दूरी पर है।

$-5 < -3$ क्योंकि −3 की तुलना में −5 शून्य के बायीं ओर शून्य से अधिक दूरी पर है।

हम इससे यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं–

- प्रत्येक धन पूर्णांक प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है।
- संख्या रेखा पर शून्य के दायीं ओर जो पूर्णांक शून्य से जितनी अधिक दूरी पर होगा, उतना ही अधिक बड़ा होगा।
- संख्या रेखा पर शून्य से बायीं ओर जो पूर्णांक शून्य से जितनी अधिक दूरी पर होगा, वह उतना ही अधिक छोटा होगा।
- शून्य प्रत्येक धन पूर्णांक से छोटा होता है।
- शून्य प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है।

आइए, कुछ अन्य उदाहरणों की मदद से समझें–

- +7 तथा −3 की तुलना करने में $+7 > -3$, क्योंकि प्रत्येक धन पूर्णांक प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है।
- −10 तथा −13 की तुलना करने में $-10 > -13$, क्योंकि −13 संख्या रेखा पर −10 से अधिक दूर है। इसलिए −13 छोटा होगा।
- 0 तथा −8 की तुलना करने पर $0 > -8$, क्योंकि शून्य प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है।

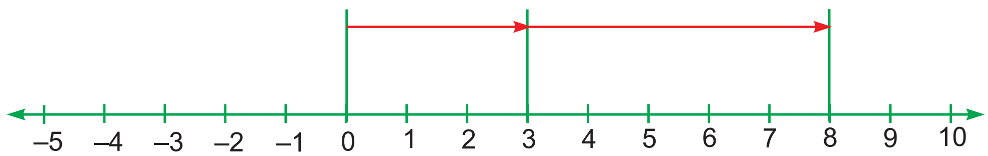
हम जानते हैं कि संख्या रेखा पर निरूपित प्रत्येक दाहिनी ओर का पूर्णांक अपने बायीं ओर के पूर्णांक से बड़ा होता है, जैसे कि $4 > 2$, क्योंकि 4 संख्या रेखा पर 2 से दायीं ओर है। इसी प्रकार $0 > -1$ से तथा $-2 > -3$

2.4 संख्या रेखा द्वारा पूर्णांकों का योग तथा घटाना

हम जानते हैं कि संख्या रेखा पर 5 को निरूपित करने के लिए शून्य से पांच पग दायीं ओर चलना होता है तथा –5 के लिए पांच पग शून्य से बायीं ओर।

संख्या रेखा पर '3 + 5' को निरूपित करने के लिए पहले शून्य से तीन पग दायीं ओर चलकर 3 पर पहुंचेंगे और फिर 5 पग दायीं ओर चलकर 8 पर पहुंचते हैं।

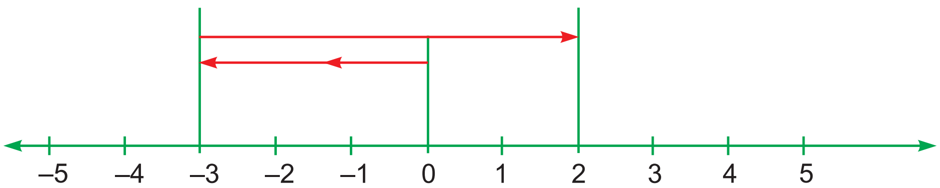
अत: $3 + 5 = 8$



चित्र 2.3

अब '–3 + 5' को संख्या रेखा पर निरूपित करने के लिए हम पहले शून्य से 3 पग बायीं ओर चलकर '–3' पर पहुंचेंगे तथा फिर '–3' से 5 पग दायीं ओर चलकर 2 पर पहुंचते हैं।

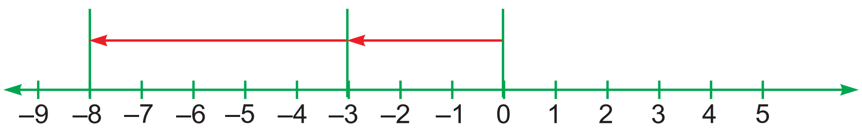
अत: $-3 + 5 = 2$



चित्र 2.4

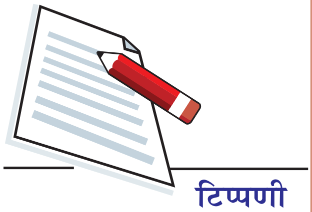
आइए, अब हम $(-3) + (-5)$ को संख्या रेखा पर निरूपित करते हैं।

'–3' को निरूपित करने के लिए शून्य से 3 पग बायीं ओर चलते हैं तथा फिर '–3' से 5 पग और बायीं ओर चलकर हम '–8' पर पहुंचते हैं।



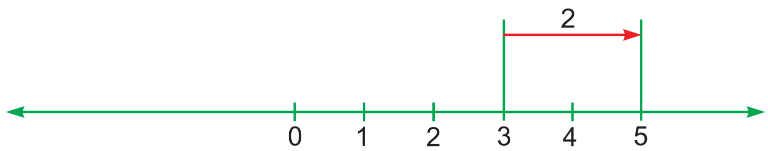
चित्र 2.5

अत: $(-3) + (-5) = -8$



टिप्पणी

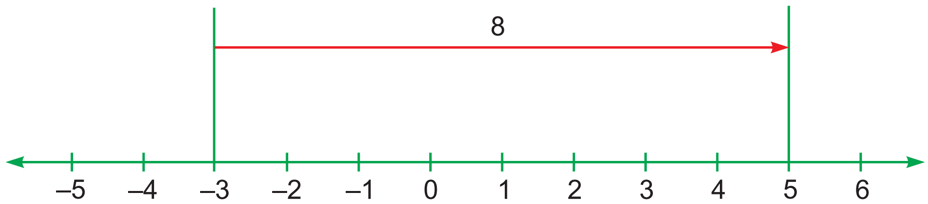
दो पूर्णांकों का घटाना : यदि हम संख्या रेखा की सहायता से 5 में से 3 घटाना चाहते हैं तो हमें एक ऐसी संख्या ज्ञात करनी है, जिसे '3' में जोड़ने पर 5 प्राप्त हो। संख्या रेखा '3' से दो पग दायीं ओर जाने पर '5' प्राप्त होता है



चित्र 2.6

अतः (5) – (3) = 2

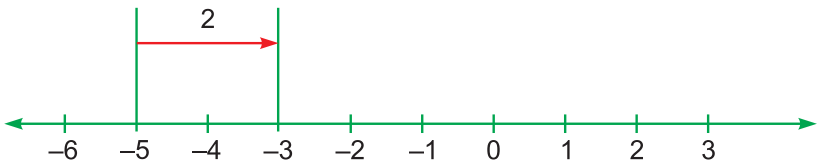
अब '5' से (–3) घटाने के लिए हमें वह संख्या ज्ञात करनी है, जिसे –3 में जोड़ने पर 5 प्राप्त हो। दूसरे शब्दों में, कितने पग चलकर हमें '–3' से दायीं ओर चलकर 5 तक पहुंचना है, जिसके लिए हमें 8 पग दायीं ओर चलना होगा।



चित्र 2.7

अतः (5) – (–3) = 8

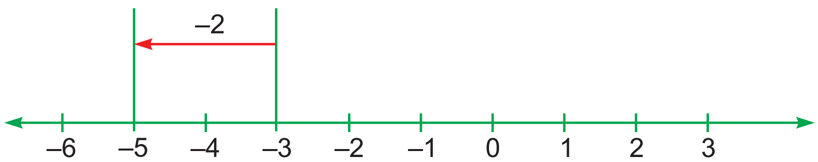
इसी प्रकार '–3' से '–5' घटाने के लिए हमें '–5' से दायीं ओर चलकर '–3' तक पहुंचना होगा, जिसके लिए हमें 2 पग दायीं ओर चलना होगा



चित्र 2.8

अतः (–3) – (–5) = 2

यदि '–5' से '–3' घटाना हो तो '–3' से दो पग बायीं ओर जाकर ही –5 तक पहुंचा जा सकता है



चित्र 2.9

अतः (–5) – (–3) = –2

देखें आपने कितना सीखा 2.1

1. नीचे दिए गए संख्या युग्मों में कौन-सी संख्या छोटी हैं?

   (i) 5, –5 (ii) –12, –8 (iii) 0, –3 (iv) 405, –517

2. बीच के पूर्णांक लिखो :

   (i) –3 और 3 (ii) 0 और 5 (iii) –4 और 0 (iv) –7 और –1

3. निम्न में से प्रत्येक में '*' के चिह्न के स्थान पर $<$ या $>$ लगाओ, ताकि कथन सही हो:

   (i) –3 * –7 (ii) 0 * 4 (iii) –3 * 2 (iv) –8 * 8

4. मान ज्ञात कीजिए:

   (i) –4+7 (ii) 6+(–8) (iii) –2+(–7) (iv) 7–(–2)

   (v) –8–(–3) (vi) 0–(–5)

2.5 पूर्णांक का निरपेक्ष मान

किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान उसका वह संख्यात्मक मान होता है, जिसमें उसके चिह्न पर ध्यान नहीं दिया जाता। संख्या रेखा पर किसी पूर्णांक के निरपेक्ष मान का तात्पर्य 0 से उस पूर्णांक की दूरी होती है, जिसमें दिशा का ध्यान नहीं दिया जाता।

अत: + 3 का निरपेक्ष मान 3 है

– 3 का निरपेक्ष मान 3 है

0 का निरपेक्ष मान 0 है

किसी संख्या के निरपेक्ष मान को दर्शाने के लिए उस संख्या को दो उर्ध्वाकार रेखा खण्डों के बीच रखते हैं।

अत: –5 का निरपेक्ष मान $|-5|$ लिखकर दर्शाते हैं।

अत: $|7| = 7$; $|-7| = 7$

2.6 पूर्णांकों पर संक्रियाएं

2.6.1 पूर्णांकों का योग

संख्या रेखा से हमने दो पूर्णांकों का योग करके निम्न परिणाम प्राप्त किए:

$5 + 4 = 9$, $7 + (-3) = 4$

$(-6) + (-3) = -9$ $(-5) + (2) = -3$

इस प्रकार हम निम्न निष्कर्ष निकाल सकते हैं:

(i) दो धन पूर्णांकों अथवा दो ऋण पूर्णांकों का योग करने के लिए हम उनके निरपेक्ष मानों को जोड़कर योज्यों का चिह्न योग में लगा देते हैं।

(ii) एक धन पूर्णांक और एक ऋण पूर्णांकों का योग करने के लिए हम पहले दोनों के निरपेक्ष मान का अंतर ज्ञात कर लेते हैं और इस अंतर में योज्यों में बड़े निरपेक्ष मान वाले पूर्णांक का चिह्न लगा देते हैं।

उदाहरण 2.1 : -537 और -231 को जोड़िए

हल : $(-537) + (-231) = -(|-537| + |-231|)$

$= -(537 + 231)$

$= -768$

उदाहरण 2.2 : 405 और -227 को जोड़िए

हल : $(405) + (-227) = +(|405| - |-227|)$

$= +(405 - 227)$

$= 178$

उदारहण 2.3 : -349 और 127 को जोड़िए

हल : $(-349) + (127) = (|-349| - |127|)$

$= -(349 - 127)$

$= -222$

उदाहरण 2.4 : -15, -47 तथा 84 का योग ज्ञात कीजिए

हल : $(-15) + (-47) + 84 = [-15 + (-47)] + 84$

$= -[|-15| + |-47|] + 84$

$= -[15 + 47] + 84 = -62 + 84 = 22$

2.6.2 पूर्णांकों के योग के गुण

1. पूर्णांकों के निम्नलिखित योगों को ध्यान से देखिए:

   (i) $5 + (-8) = -3$

   (ii) $15 + (-11) = 4$

(iii) $-6 + (-7) = -13$

योगफल $-3, -4$ व -13 भी पूर्णांक हैं

अत: यदि a तथा b दो पूर्णांक हों तो a + b भी पूर्णांक होता है

2. (i) $4 + (-5) = -1$ तथा $(-5) + 4 = -1$

(ii) $-4 + (-5) = -9$ तथा $(-5) + (-4) = -9$

अत: $a + b = b + a$, जबकि a, b पूर्णांक हैं।

3. $-3 + (-5) + 4 = (-3) + (-5) + 4 = (-8) + 4 = -4$

अथवा $-3 + (-5) + 4 = (-3) + (-5) + 4 = (-3) + (-1) = -4$

अत: $(a + b) + c = a + (b + c)$, जबकि a, b, c पूर्णांक हैं।

4. $(-3) + 0 = -3$ तथा $0 + (-3) = -3$

अत: $a + 0 = 0 + a = a$, a कोई एक पूर्णांक है।

2.6.3 पूर्णांकों का व्यवकलन (घटा)

संख्या रेखा की सहायता से हमने देखा कि $5 - (-3) = 8$, $3 - (-2) = 5$

$5 - (-3) = 8$, अथवा $5 + (-3$ का प्रतिलोम$) = 5 + (+3) = 8$

अत: जब गुणा में दो एक जैसे चिह्न (दोनों धन अथवा दोनों ऋण) आ जाएं तो वह संख्या सदैव धनात्मक होगी। यदि विपरीत चिह्न आ जाएं तो वह सदैव ऋणात्मक होगी

अत: $a - (-b) = a + b; a + (-b) = a - b$

$a + (+b) = a + b; a - (+b) = a - b$

उदाहरण 2.5 : -15 को 18 में से घटाइए

हल : $18 - (-15) = 18 + 15 = 33$

उदाहरण 2.6 : -45 से (-27) घटाइए।

हल : $-45 - (-27) = -45 + 27 = -18$

टिप्पणी : बहुपदीय व्यंजकों (जिनमें धनात्मक तथा ऋणात्मक संख्याएं हों) का मान ज्ञात करने के लिए हम सभी धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ते हैं तथा सभी ऋणात्मक पूर्णांकों को अलग से जोड़ते हैं तथा फिर उन दोनों का योग ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 2.7 : मान ज्ञात कीजिए: $-17 + 25 - (-37) + (-28) + (-15)$

हल : दिए गए व्यंजक को हम पुन: इस प्रकार लिख सकते हैं

$$(-17) + 25 + 37 + (-28) + (-15) = (-17) + (-28) + (-15) + 25 + 37$$

$$= -60 + 62 = 2$$

2.6.4 पूर्णांकों के व्यवकलन के गुण

1. हम देख चुके हैं कि दो पूर्णांकों का अंतर भी पूर्णांक होता है।

   अत:, **यदि a, b दो पूर्णांक हों तो a – b भी पूर्णांक होता है**

2. $a - 0 = a$, जबकि a कोई पूर्णांक है।

2.6.5 पूर्णांकों का गुणन

पूर्णांकों के निम्नलिखित गुणन ध्यान से देखें

$$3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4)$$

$$= -12 = -(3 \times 4)$$

इसी प्रकार $(-3) \times 5 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$

$$= -15 = -(3 \times 5)$$

अत: एक ऋणात्मक और धनात्मक, पूर्णांक का गुणनफल प्राप्त करने के लिए, उनके निरपेक्ष मानों का गुणनफल प्राप्त करके उस पर ऋणात्मक चिह्न लगा दिया जाता है।

उदाहरण 2.8 : $(-15) \times (8)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(-15) \times 8 = -(15 \times 8) = -120$

अब पूर्णांकों के गुणन की निम्न तालिका पर ध्यान दें

$(-5) \times 3 = -15$

$(-5) \times 2 = -10$

$(-5) \times 1 = -5$

$(-5) \times 0 = 0$

$(-5) \times (-1) = ?$

$(-5) \times (-2) = ?$

हम देखते हैं कि जब दूसरा पूर्णांक 1 घटता है तो गुणनफल 5 बढ़ जाता है। इसलिए $(-5) \times (-1)$, 0 से 5 अधिक (अर्थात् 5) होना चाहिए तथा $(-5) \times (-2)$, 5 से 5 अधिक (अर्थात् 10) होना चाहिए।

इस प्रकार $(-5) \times (-1) = 5$ या (5×1)

$(-5) \times (-2) = 10$ या (5×2)

अतः यदि दोनों पूर्णांक ऋणात्मक (अथवा धनात्मक) हों तो उनका गुणनफल एक धन पूर्णांक होता है, जो कि दोनों के निरपेक्ष मानों के गुणनफल के बराबर होता है।

उदाहरण 2.9 : $(-25) \times (-40)$ का मान ज्ञात करो।

हल : $(-25) \times (-40) = +(25 \times 40)$

$= 1000$

2.6.6 पूर्णांकों में गुणन के गुणधर्म

1. $3 \times (-4) = -12$, $-5 \times (-6) = 30$

   गुणनफल -12 व 30 भी पूर्णांक है।

   अतः **यदि a, b पूर्णांक हों तो $a \times b$ भी पूर्णांक होता है।**

2. $4 \times (-5) = -20$ तथा $(-5) \times 4 = -20$

   इस प्रकार $4 \times (-5) = (-5) \times 4$

   अतः **$a \times b = b \times a$, जबकि a, b पूर्णांक हैं।**

3. $(3 \times 4) \times (-5) = 12 \times (-5) = -60$

   तथा $3 \times [4 \times (-5)] = 3 \times (-20) = -60$

   इस प्रकार $(3 \times 4) \times (-5) = 3 \times [4 \times (-5)]$

   अतः **$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, जबकि a, b, c पूर्णांक हैं।**

4. $a \times 0 = 0 \times a = 0$, a कोई पूर्णांक है।

5. $a \times 1 = 1 \times a = a$, a कोई पूर्णांक है।

6. $-2 \times [(-6) + 5] = -2 \times [-1] = 2$

   तथा $(-2) \times (-6) + (-2) \times 5 = +12 + (-10) = 2$

   अतः $-2 \times [(-6) + 5] = (-2) \times (-6) + (-2) \times 5$

   अतः **$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, जबकि a, b, c पूर्णांक हैं।**

2.6.7 पूर्णांकों का विभाजन

हम जानते हैं कि विभाजन गुणन का प्रतिलोम है, इसलिए 45 को (-5) से विभाजन का अभिप्राय यह है कि (-5) को किस पूर्णांक से गुणा किया जाए, ताकि गुणनफल 45 प्राप्त हो।

क्योंकि $(-57) \div 19 = -3$ क्योंकि $(-3) \times 19 = -57$

तथा $(-40) \div (-8) = 5$ क्योंकि $(-8) \times 5 = -40$

अत: हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि

(i) यदि दो पूर्णांक धनात्मक अथवा दोनों ऋणात्मक हों तो उनका भागफल एक धन पूर्णांक होता है, जो उन दोनों पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों के भागफल के बराबर होता है।

(ii) एक धन पूर्णांक तथा एक ऋण पूर्णांक का भागफल एक ऋण पूर्णांक होता है, जिसका निरपेक्ष मान, उन दोनों के निरपेक्ष मानों के भागफल के बराबर होता है।

उदाहरण 2.10 : 80 को –16 से भाग दो।

हल : $80 \div (-16) = -(|80| \div |-16|) = -(80 \div 16)$

$$= -5$$

2.6.8 विभाजन के गुण

$(-15) \div 5 = -3$ जो कि एक पूर्णांक है।

परंतु $(-17) \div 5$ एक पूर्णांक नहीं है।

1. अत: यदि a और b दो पूर्णांक हों तो $a \div b$ सदैव पूर्णांक नहीं होता।

2. $0 \div a = 0$ जबकि $a \div 0$ परिभाषित नहीं है।

देखें आपने कितना सीखा 2.2

1. पूर्णांकों को जोड़िए:

   (i) –312 व 217 (ii) –425 व –308

   (iii) –231 व 231 (iv) 125 व –45

2. योगफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $200 + (-135) + (-65)$

   (ii) $15 + 135 + (-250)$

3. घटाओ:

   (i) 17 को –13 में से (ii) –25 को 18 में से

   (iii) –115 को –25 में से (iv) –315 को 0 में से

   (v) 0 को –412 में से

4. मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $-35 - (-28)$

   (ii) $-17 -18 - (-45)$

5. निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $3 \times (-13)$ (ii) $(-115) \times 4$

   (iii) $(-27) \times (-30)$ (iv) $-5 \times (-8) \times 4$

   (v) $(-317) \times (225) \times 0$

6. निम्न में प्रत्येक की जांच कीजिए:

   (i) $15 \times (-5) \times 20 = 15 \times (-5) \times 20$

   (ii) $28 \times (11 + (-9) = 28 \times 11 + 28 \times (-9)$

7. भाग दीजिए:

   (i) (−85) को 17 से (ii) 72 को (−12) से

8. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (i) 88 ..... = −8 (ii) −108 ..... = 9

   (iii) −144 ..... = 16 (iv) ..... 12 = −8

2.7 समूहन संकेतों का प्रयोग

दो या दो से अधिक संक्रियाओं वाले व्यंजकों को सरल करने के लिए हम संक्रियाएं इस क्रम में करते हैं : सबसे पहले विभाजन, फिर गुणन, फिर योग और अंत में व्यवकलन

उदाहरणार्थ : $24 - 6 \div 3 \times 4 = 24 - 2 \times 4$

$$= 24 - 8$$

$$= 16$$

यह निश्चित करने के लिए कि कौन-सी संक्रिया पहले की जाए, हम कोष्ठकों (समूहन संकेत) का प्रयोग करते हैं।

उदाहरणार्थ, $49 \div (3 + 4) = 49 \div 7 = 7$

जब एक से अधिक कोष्ठकों की आवश्यकता होती है, तब प्रयोग में आने वाले कोष्ठक निम्न हैं:

संकेत	नाम
( )	छोटा कोष्ठक
{ }	मंझला कोष्ठक
[ ]	बड़ा कोष्ठक

प्रत्येक संकेत का बायां भाग उसका आरंभ तथा दायां भाग उसका अंत प्रदर्शित करता है और इनके प्रयोग का क्रम इस प्रकार होता है [{( )}]

जब [{( )}] प्रयोग किया गया हो तो सबसे पहले भीतर के कोष्ठक की संक्रियाओं को संपन्न करके उस कोष्ठक को हटाया जाता है तथा उसके बाद उससे बाहर वाले कोष्ठक को हटाते हैं।

उदाहरण 2.11 : सरल कीजिए : $\{15 + (5 - 8)\} \div 6$

हल : $\{15 + (5 - 8)\} \div 6$ अथवा $\{15 - 3\} \div 6 = 12 \div 6 = 2$

यदि किसी संख्या और कोष्ठक के बीच कोई संक्रिया चिह्न न हो तो वहां 'गुणन' माना जाता है

जैसे $5\ (43 - 13) \quad = 5 \times (43 - 13)$

$= 5 \times 30 = 150$

उदाहरण 2.12 : मान ज्ञात कीजिए : $15 - [12 + \{9 - (17 - 3)\}]$

हल : $15 - [12 + \{9 - (17 - 3)\}] \quad = 15 - [12 + \{9 - 14\}]$

$= 15 - [12 - 5]$

$= 15 - 7$

$= 8$

देखें आपने कितना सीखा 2.3

1. मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $42 + 45 \div 9$ (ii) $320 - 120 \div 8$

   (iii) $13 - (15 - 18 \div 3)$ (iv) $(-10) + (-6) \div (-2) \times 3$

2. सरल कीजिए:

   (i) $30 + \{20 - 15 - (8 - 3)\}$

   (ii) $29 - [14 + \{16 - (12 - 4)\}]$

आइए दोहराएं

- शून्य, प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा तथा प्रत्येक धन पूर्णांक से छोटा होता है।
- प्रत्येक धन पूर्णांक प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है।
- किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान उस पूर्णांक का केवल संख्यात्मक मान होता है, जिसमें चिह्न का ध्यान नहीं दिया जाता।
- दो ऋण पूर्णांकों का योग भी ऋण पूर्णांक होता है, जिसका निरपेक्ष मान उन दोनों पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों के योग के समान होता है।
- एक धन पूर्णांक और एक ऋण पूर्णांक का योग करने के लिए दोनों के निरपेक्ष मानों का अंतर ज्ञात करते हैं तथा इसके साथ बड़े निरपेक्ष मान वाले पूर्णांक का चिह्न लगाते हैं।
- पूर्णांक b को पूर्णांक a से घटाने पर $a - b$ प्राप्त होता है।
- एक धन और एक ऋण पूर्णांक का गुणनफल (अथवा भागफल) ज्ञात करने के लिए उनके निरपेक्ष मानों का गुणनफल (अथवा भागफल) ज्ञात करके ऋणात्मक चिह्न लगा देते हैं।
- दो धन पूर्णांकों अथवा ऋण पूर्णांकों का गुणनफल (अथवा भागफल) एक धन पूर्णांक होता है, जो पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों के गुणनफल (अथवा भागफल) के बराबर होता है।
- दो या दो से अधिक संक्रियाओं वाले व्यंजकों को सरल करने के लिए हम संक्रियाओं को इस क्रम में करते हैं, पहले विभाजन, फिर गुणन, फिर योग, फिर व्यवकलन।
- कोष्ठकों को हटाने के लिए सबसे पहले छोटी, फिर मंझली तथा अंत में बड़ी कोष्ठक हटाते हैं।

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित पूर्णांकों को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए:

   (i) -7 (ii) -3 (iii) 0 (iv) 5 (v) 7

2. संख्या रेखा की सहायता से लिखिए कि कौन-सा पूर्णांक

   (i) 2 से 5 अधिक है (ii) -3 से, 4 कम है

   (iii) -8 से 7 अधिक है (iv) 3 से 5 कम है

3. योग ज्ञात कीजिए:

   (i) $253 + (-133)$ (ii) $(-625) + (-3512) + 625$

4. घटाइए:

(i) (–34) में से 65 को (ii) –45 में से (–30) को

(iii) (–450) तथा 210 के योग को 240 में से

(iv) 395 को 0 में से

5. सरल कीजिए :

(i) $(-7) \times 8 + (-7) \times 12$ (ii) $14 \times (-12) + 16 \times (-12)$

6. भागफल ज्ञात कीजिए:

(i) $21 \div (-3)$ (ii) $(-21) \div 3$

(iii) $(-64) \div (-16)$ (iv) $0 \div 3215$

7. सरल कीजिए:

(i) $16 + 8 \div 4 - 2 \times 3$ (ii) $(-16) \div (-8) + (-4)$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 2.1

1. (i) –5 (ii) –12 (iii) –3 (iv) –517

2. (i) –2, –1, 0, 1, 2 (ii) 1, 2, 3, 4

(iii) –3, –2, –1 (iv) –6, –5, –4, –3, –2

3. (i) $-3 > -7$ (ii) $0 < 4$ (iii) $-3 < 2$ (iv) $-8 < 8$

4. (i) 3 (ii) –2 (iii) –9 (iv) 9

(v) –5 (vi) 5

देखें आपने कितना सीखा 2.2

1. (i) –95 (ii) –733 (iii) 0 (iv) 80

2. (i) 0 (ii) –100

3. (i) –30 (ii) 43 (iii) 90 (iv) 315

(v) –412

4. (i) −7 (ii) 10

5. (i) −39 (ii) −460 (iii) 810 (iv) 160

   (v) 0

7. (i) −5 (ii) −6 (iii) 7 (iv) −1

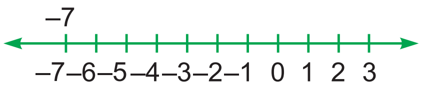
8. (i) −11 (ii) −12 (iii) −9 (iv) −96

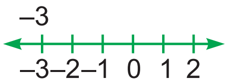
देखें आपने कितना सीखा 2.3

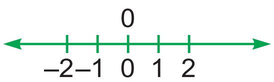
1. (i) 47 (ii) 305 (iii) 4 (iv) −1

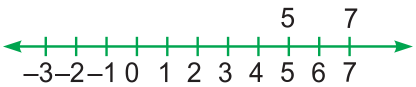
2. (i) 30 (ii) 7

अभ्यास करें

1. (i) 

(ii) 

(iii) 

(iv) और (v) 

2. (i) 7 (ii) −7 (iii) −1 (iv) −2

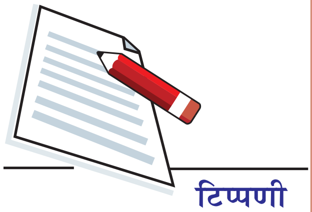
3. (i) 120 (ii) −3512

4. (i) −99 (ii) −15 (iii) 480 (iv) −395

5. (i) −140 (ii) −360

6. (i) −7 (ii) −7 (iii) 4 (iv) 0

7. (i) 12 (ii) −2



3

वर्ग और वर्गमूल तथा घन और घनमूल

आप प्राकृत संख्याओं, पूर्णांकों, संख्याओं के बारे में पढ़ चुके हैं। आप इन संख्याओं में जोड़, घटा, गुणा और भाग की संक्रियाओं के बारे में भी पढ़ चुके हैं।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- प्राकृत संख्याओं और पूर्णांकों का वर्ग तथा वर्गमूल ज्ञात करना।
- सम संख्याओं का वर्ग सम संख्याएं तथा विषम संख्याओं का वर्ग विषम संख्याएं होती हैं।
- गुणनखंड विधि द्वारा संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना।
- भाग क्रिया द्वारा संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना।
- वर्गमूल द्वारा कुछ समस्याओं को हल करना।
- घन तथा घनमूल का अर्थ
- अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करना।

3.1 संख्याओं के वर्ग

आप जानते हैं कि

$$1 \times 1 = 1$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$10 \times 10 = 100$$

ऊपर के उदाहरणों में संख्या को उसी संख्या से गुणा किया गया है। प्राप्त परिणाम उनका गुणनफल है।

यह परिणाम उस संख्या का वर्ग कहलाता है। अर्थात् 1 का वर्ग 1, 2 का वर्ग 4, 3 का वर्ग 9 है, इत्यादि।

यदि किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा किया जाए तो प्राप्त गुणनफल उस संख्या का वर्ग कहलाता है तथा इसे $(\text{संख्या})^2$ द्वारा प्रकट किया जाता है।

अतः $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ ...

निम्नलिखित सारणी में 1 से 20 तक की प्राकृत संख्याओं के वर्ग दिए गए हैं–

प्राकृत संख्या	वर्ग	प्राकृत संख्या	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

हम जानते हैं कि दो ऋणात्मक संख्याओं का गुणनफल धनात्मक होता है। अतः

$(-1) \times (-1) = 1$

$(-2) \times (-2) = 4$

$(-3) \times (-3) = 9$

इस प्रकार हम देखते हैं कि एक ऋणात्मक संख्या का वर्ग एक धनात्मक संख्या होती है।

किसी ऋणात्मक संख्या का वर्ग एक धनात्मक संख्या होती है।

उदाहरण 3.1 : निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए:

(i) 27 (ii) −13 (iii) −36

हल : (i) 27 का वर्ग $= 27^2 = 27 \times 27 = 729$

(ii) $(-13)^2 = (-13) \times (-13) = 169$

(iii) $(-36)^2 = (-36) \times (-36) = 1296$

देखें आपने कितना सीखा 3.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए:

(i) 9 (ii) 25 (iii) −8 (iv) −19

3.2 प्राकृत संख्याओं के वर्ग

आइए प्राकृत संख्याओं के वर्गों पर विचार करें:

$1^2 = 1$ $2^2 = 4$

$3^2 = 9$ $4^2 = 16$

$5^2 = 25$ $6^2 = 36$

: : : :

$9^2 = 81$ $10^2 = 100$

अत: हम देखते हैं कि

1. किसी विषम संख्या का वर्ग सदैव विषम संख्या होती है।

2. किसी सम संख्या का वर्ग सदैव सम संख्या होती है।

उदाहरण 3.2 निम्नलिखित प्रतिरूप को ध्यान से देखिए:

$2^2 = 4 = 3 \times 1 + 1$

$3^2 = 9 = 3 \times 3$

$4^2 = 16 = 3 \times 5 + 1$

$5^2 = 25 = 3 \times 8 + 1$

$6^2 = 36 = 3 \times 12$

$7^2 = 49 = 3 \times 16 + 1$

इस प्रतिरूप से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं? अपने निष्कर्ष को उदाहरण देकर सत्यापित कीजिए।

हल : इस प्रतिरूप को देखने से हमें पता चलता है कि 1 से बड़ी प्रत्येक संख्या के वर्ग को 3 के गुणज या 3 के गुणज +1 के रूप में लिखा जा सकता है।

टिप्पणी

उदहरणार्थ,

$$8^2 = 64 = 3 \times 21 + 1$$

तथा $$9^2 = 81 = 3 \times 27$$

देखें आपने कितना सीखा 3.2

1. निम्नलिखित में प्रत्येक का वर्ग ज्ञात कीजिए:

   (i) 67 (ii) 83 (iii) 101 (iv) −71

2. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएं किसी प्राकृत संख्या का वर्ग हैं?

   64, 40, 36, 35

3. निम्नलिखित में से कौन-कौन सी संख्याओं के वर्ग सम संख्याएं हैं?

   31, 48, 115, 526, 1250

4. निम्नलिखित में से कौन-कौन सी संख्याओं के वर्ग विषम संख्याएं हैं?

   309, 5002, 4709, 484, 1111

5. निम्नलिखित प्रतिरूप को ध्यान से देखिए:

   $2^2 = 2 \times 2$

   $3^2 = 2 \times 4 + 1$

   $4^2 = 2 \times 8$

   $5^2 = 2 \times 12 + 1$

   $6^2 = 2 \times 18$

   $7^2 = 2 \times 24 + 1$

   इस प्रतिरूप को बढ़ाते हुए अगले दो पद और लिखिए।

3.3 वर्गमूल

हमने पिछले खंड में संख्याओं के वर्ग के बारे में पढ़ा है। 4 परिपूर्ण वर्ग संख्या है, क्योंकि यह 2 का वर्ग है। दूसरे शब्दों में हम कहते हैं कि 4 का वर्गमूल 2 है। संख्या 4 का वर्ग 16 है, अत: संख्या 16 का वर्गमूल 4 है।

क्योंकि संख्या 5 का वर्ग 25 है, इसलिए 25 का वर्गमूल 5 है।

अत: किसी संख्या a का वर्गमूल वह संख्या है, जिसे उसी संख्या से गुणा करने पर गुणनफल के रूप में संख्या a प्राप्त होती है।

हम धनात्मक वर्गमूल के लिए करणी $\sqrt{}$ का प्रयोग करते हैं।

$\therefore \sqrt{16} = 4, \sqrt{36} = 6, \sqrt{100} = 10$ इत्यादि

टिप्पणी

हम यह भी जानते हैं कि

$$(-2) \times (-2) = 4, \quad (-3) \times (-3) = 9,$$

$$(-4) \times (-4) = 16$$

अर्थात् 4 का वर्गमूल −2 भी है,

9 का वर्गमूल −3 तथा 16 का वर्गमूल −4 भी होता है।

इससे हमें यह ज्ञात होता है कि प्रत्येक संख्या के दो वर्गमूल होते हैं। एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक।

लेकिन इस पाठ में हम केवल धनात्मक वर्गमूलों पर ही चर्चा करेंगे।

क्या आप ऐसी कोई संख्या बता सकते हैं कि जिसे उसी से गुणा करने पर गुणनफल एक ऋणात्मक संख्या प्राप्त हो?

इसके उत्तर में आप कहेंगे, नहीं।

अत: हम कह सकते हैं कि

किसी ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल ज्ञात नहीं किया जा सकता।

3.4 गुणनफल विधि द्वारा किसी परिपूर्ण वर्ग का वर्गमूल ज्ञात करना

हम जानते हैं कि $3 \times 3 = 9$

अत: $\sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3} = 3$

इसी प्रकार $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

और $\sqrt{625} = \sqrt{5 \times 5 \times 5 \times 5} = 5 \times 5 = 25$

तथा $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ इसलिए $\sqrt{36} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3} = 2 \times 3 = 6$

इन उदाहरणों से हम देखते हैं कि यदि किसी संख्या के गुणनखंडों में कोई गुणनखंड दो बार आता है तो उसके वर्गमूल में वह गुणनखंड एक बार आता है। अत: वर्गमूल ज्ञात करने के लिए दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखंडों के युग्मों से, एक-एक अभाज्य गुणनखंड लेकर उनका गुणनफल ज्ञात कर लेते हैं।

वर्गमूल ज्ञात करने की इस क्रिया में हम निम्न चरणों को अपनाते हैं:

(i) पहले दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखंड करते हैं।

(ii) फिर समान गुणनखंडों के युग्म बनाते हैं।

तथा (iii) फिर प्रत्येक युग्म में से एक संख्या लेकर उनको गुणा कर लेते हैं।

प्राप्त गुणनफल अभीष्ट वर्गमूल होता है।

उदाहरण 3.3 : 324 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हलः

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
	3

$\therefore 324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$\therefore \sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3$

$= 18$

उदाहरण 3.4 : 2601 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हलः

3	2601
3	867
17	289
	17

$\therefore 2601 = 3 \times 3 \times 17 \times 17$

$\therefore \sqrt{2601} = 3 \times 17 = 51$

देखें आपने कितना सीखा 3.3

गुणनखंड विधि द्वारा निम्नलिखित में से प्रत्येक का वर्गमूल ज्ञात कीजिएः

1. 1296   2. 4225   3. 50176   4. 5184   5. 160000

3.5 विभाजन विधि द्वारा किसी परिपूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना

पिछले खंड में हमने गुणनखंड विधि द्वारा संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात किए, परंतु जब संख्याएं बहुत बड़ी हों या सरलतापूर्वक उनके गुणनखंड ज्ञात न किए जा सकें तो उस स्थिति में हम विभाजन विधि का प्रयोग करते हैं। आइए, विभाजन विधि द्वारा 1296 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हम देखते हैं कि

$30^2 = 900$

और $40^2 = 1600$

अत: 1296 का वर्गमूल 30 और 40 के बीच कोई संख्या है। अर्थात् वर्गमूल में दहाई का अंक 3 होगा, 96 में इकाई का अंक 6 है

तथा $4 \times 4 = 16$ और $6 \times 6 = 36$

अत: इकाई का अंक 4 अथवा 6 होना चाहिए

जांच करने से पता लगता है

$$34 \times 34 = 1156$$

$$36 \times 36 = 1296$$

अत: $\sqrt{1236} = 36$

हम यहां देखते हैं कि वर्गमूल में अंकों की संख्या दो है, जबकि दी गई संख्या में अंकों की संख्या 4 है। इस उदाहरण को हम विभाजन विधि द्वारा इस प्रकार हल करते हैं:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;36 \\ \hline 3 & 12,96 \\ & -9 \\ \hline 66 & \;\;396 \\ & -396 \\ \hline & \;\;\;\;0 \end{array}$$

क्रिया के चरण

1. इकाई के अंक से आरंभ कर संख्या को दो अंकों के युग्मों में विभक्त करो। यहां ऐसे दो युग्म प्राप्त होते हैं।
2. ऐसी बड़ी से बड़ी पूर्ण संख्या ज्ञात करो, जिसका वर्ग 12 या 12 से कम हो। ऐसी संख्या 3 है। 3 को भाजक के रूप में लिखिए।

   इसके वर्ग 9 को 12 के नीचे लिखिए तथा 3 को भागफल में भी लिखिए।
3. 9 और 12 में से घटाकर प्रथम शेषफल ज्ञात कीजिए तथा अंकों के अगले युग्म को इस शेषफल के दायीं ओर लिख लीजिए। अब भाज्य 396 है।
4. 3 के दो गुने अर्थात् 6 को अगले संभावित भाजक में दहाई के स्थान पर लिखिए।
5. अब आपको ऐसी संख्या पर विचार करना है, जिसे 6 के साथ इकाई के अंक के रूप में रखकर उसी संख्या से गुणा करने पर गुणनफल 396 हो जाए।
6. इस प्रकार अगला भाजक 66 है, जिसे 6 से गुणा करने पर 396 प्राप्त होता है।
7. 6 को भागफल में भी 3 के दायीं ओर लिखिए तथा 396 को भाज्य 396 से घटाओ। अब शेष शून्य है।

   $\therefore \sqrt{1296} = 36$

आइए, अब हम इस क्रिया को एक 6 अंकों की संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए अपनाएं:

माना संख्या 290521 है।

संख्या 290521 के तीन युग्म 29, 05, 21 हैं।

अर्थात् वर्गमूल में तीन अंकों वाली संख्या होगी।

	5 3 9
5	29, 05, 21
	–25
103	405
	–309
1069	9621
	–9621
	0

क्रिया के चरण

1. इकाई के अंक से आरंभ करके संख्या को दो अंकों के युग्मों में विभक्त कीजिए। ऐसे तीन युग्म हैं।
2. ऐसी बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए, जिसका वर्ग या तो 29 हो या इससे कम हो। ऐसी संख्या 5 है। 5 को भाजक के रूप में लिखिए। इसके वर्ग 25 को 29 के नीचे लिखिए तथा 5 को भागफल में भी सैकड़े के स्थान पर लिखिए।
3. 29 में से 25 घटाकर शेष 4 लिखिए तथा अगले युग्म को इसके युग्म को इसके दायीं ओर लिखिए। इस प्रकार अगला भाज्य 405 हो जाता है।
4. 5 के दो गुने 10 को अगले भाजक में दहाई के स्थान पर लिखिए।
5. अब $40 \div 10 = 4$ पर विचार करो अर्थात् 104 को अगले भाजक के रूप में प्रयोग कीजिए।

   परंतु $104 \times 4 = 416$ अधिक हो जाता है 405 से।

   $\therefore$ 104 भाजक नहीं हो सकता। अत: 103 को भाजक के रूप में लीजिए।
6. 103 को 3 से गुणा कीजिए। गुणनफल 309 से 405 में से घटाइए। 3 को भागफल में दहाई के स्थान पर लिखिए।
7. चरण 6 के शेष 96 के दायीं ओर अगले युग्म को लिखिए। अब अगला भाज्य 9621 हो जाता है।

8. 53 के दो गुने 106 को अगले भाजक में इकाई का स्थान छोड़कर लिखिए।

9. अब 96 ÷ 10 = 9 + ...

   ∴ अगले भाजक के रूप में 1069 पर विचार करो

10. क्योंकि 1069 × 9 = 9621,

    ∴ अगला भाजक 1069 है। 9621 को भाज्य 9621 में से घटाओ, जिससे अंतिम शेष शून्य प्राप्त होता है।

11. 9 को भागफल में इकाई के स्थान पर भी लिखिए।

    $\therefore\ \sqrt{290521} = 539$.

टिप्पणी : वर्गमूल में अंकों की संख्या सदैव, दी हुई परिपूर्ण वर्ग संख्या में युग्मों की संख्या के बराबर होती है।

उदाहरण 3.5 : 49284 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल:

$$
\begin{array}{r|r}
 & 2\ 2\ 2 \\ \hline
2 & 4,\ 9\ 2,\ 8\ 4 \\
 & -4 \\ \hline
4\ 2 & 0\ 9\ 2 \\
 & -8\ 4 \\ \hline
4\ 4\ 2 & 8\ 8\ 4 \\
 & -8\ 8\ 4 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt{49284} = 222$

टिप्पणी : इस उदाहरण के दो युग्म बनते हैं तथा एक अंक 4 बचता है। अतः हम यहां पर 4 के वर्गमूल पर विचार करते हैं।

उदाहरण 3.6 : 256036 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल:

$$
\begin{array}{r|r}
 & 50\ \ 6 \\ \hline
5 & 25,\ 60,\ 36 \\
 & -25 \\ \hline
1006 & 06036 \\
 & -06036 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt{256036} = 506$

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 3.4

निम्न में से प्रत्येक का वर्गमूल ज्ञात कीजिए:

1. 4489
2. 61504
3. 207936
4. 314721
5. 152497801

3.6 वर्गमूल पर आधारित कुछ प्रश्न

इस खंड में हम अपने दैनिक जीवन से कुछ समस्याओं को हल करने में वर्गमूल का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 3.7 : एक विद्यालय में 529 विद्यार्थी हैं। उन्हें प्रार्थना सभा में इस प्रकार खड़ा करना है कि प्रत्येक पंक्ति में उतने ही विद्यार्थी खड़े हों, जितनी कि पंक्तियों की संख्या। पंक्तियों की संख्या या प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि पंक्तियों की संख्या x है

तब प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या भी x होगी

$\therefore$ कुल विद्यार्थियों की संख्या $= x \times x = x^2$

$\therefore \quad x^2 = 529$

$x = \sqrt{529}$

$= \sqrt{23 \times 23}$

$= 23$

$\therefore$ पंक्तियों की संख्या $= 23$

और प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या $= 23$

उदाहरण 3.8 : 2304 सेबों को बक्सों में इस प्रकार भरा जाना है कि प्रत्येक बक्से में सेबों की संख्या बक्सों की संख्या के बराबर है। बक्सों की संख्या और प्रत्येक बक्से में सेबों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना बक्सों की संख्या $= x$

$\therefore$ प्रत्येक बक्से में सेबों की संख्या $= x$

$\therefore$ कुल सेबों की संख्या $= x \times x = x^2$

$\therefore \quad x^2 = 2304$

या $\quad x = \sqrt{2304}$

$= \sqrt{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3}$

$= 4 \times 4 \times 3$

$= 48$

$\therefore$ बक्सों की संख्या $= 48$

तथा प्रत्येक बक्से में सेबों की संख्या $= 48$

उदाहरण 3.9 : एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 12100 वर्गमीटर है। इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना वर्गाकार मैदान की प्रत्येक भुजा $= x$ मीटर

$\therefore$ इसका क्षेत्रफल $= x \times x$ वर्ग मीटर

$= x^2$ वर्ग मीटर

$\therefore \quad x^2 = 12100$

या $\quad x = \sqrt{12100} = \sqrt{11 \times 11 \times 10 \times 10} = 11 \times 10$

$= 110$

$\therefore$ प्रत्येक भुजा की लंबाई $= 110$ मीटर

देखें आपने कितना सीखा 3.5

1. एक खेल में 16 कलाकारों को पंक्तियों में इस प्रकार खड़ा किया जाता है कि प्रत्येक पंक्ति में उतने ही कलाकार हों, जितनी कि पंक्तियों की संख्या है। प्रत्येक पंक्ति में कलाकारों की संख्या ज्ञात कीजिए।

2. एक बगीचे में 4096 पौधों को इस प्रकार लगाया जाना है कि प्रत्येक पंक्ति में पौधों की संख्या, पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। ज्ञात कीजिए कि पौधों को कुल कितनी पंक्तियों में लगाया जाए?

3. एक विद्यालय में 2601 में विद्यार्थी हैं। प्रार्थना सभा में विद्यार्थी इस प्रकार खड़े होते हैं कि प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या पंक्तियों की संख्या के बराबर है। प्रत्येक पंक्ति में कितने विद्यार्थी खड़े होते हैं?

4. एक वर्गाकार खेल के मैदान का क्षेत्रफल 36100 वर्ग मीटर है। खेल के मैदान की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

3.7 घन और घनमूल

किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को उस संख्या की वर्ग संख्या कहते हैं। अब यदि इस गुणनफल को पुन: उसी संख्या से गुणा कर दिया जाए, तब प्राप्त संख्या उस संख्या की घन संख्या होती है।

जैसे $2 \times 2 \times 2 = 8$ या $2^3 = 8$

तथा $7 \times 7 \times 7 = 343$ या $7^3 = 343$

यहां 8 एवं 343 क्रमश: 2 एवं 7 की घन संख्याएं हैं।

इसे इस प्रकार समझें

संख्या	तीन बार गुणा	घातीय रूप	घन संख्या
1	$1 \times 1 \times 1$	1^3	1
2	$2 \times 2 \times 2$	2^3	8
3	$3 \times 3 \times 3$	3^3	27
4	$4 \times 4 \times 4$	4^3	64
⋮	⋮	⋮	⋮

उपरोक्त तालिका में 1, 8, 27, 64 ... इत्यादि क्रमश: 1, 2, 3, 4 इत्यादि पूर्णांकों की घन संख्याएं हैं।

सारणी देखने पर पता चलता है कि सम संख्याओं के घन सम तथा विषम संख्याओं के घन विषम होते हैं।

3.8 पूर्ण घन संख्याएं

संख्या 8 पर विचार कीजिए

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

इसी प्रकार $64 = 4 \times 4 \times 4$

8 संख्या 2 का तथा 64 संख्या 4 का घन है।

64 को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं-

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

यदि किसी संख्या को अभाज्य गुणनखंडों के त्रिकों (तीन) के समूहों में लिखा जा सके तथा कोई गुणनखंड अकेले या दो के समूह या समूहों में न बचे तो ऐसी संख्याओं को हम घन संख्याएं कहते हैं।

उदाहरण के रूप में,

125 = 5 × 5 × 5 को हम त्रिकों के रूप में लिख सकते हैं, अत: यह एक पूर्ण घन संख्या है।

परंतु,

81 = 3 × 3 × 3 × 3 को त्रिकों के समूह बनाने पर एक संख्या 3 बचती है। अत: 81 पूर्ण घन संख्या या परिपूर्ण घन नहीं है।

आइए, एक और उदाहरण देखें–

$$432 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2$$

$$= 2^3 \times 3^3 \times 2$$

2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

2 तथा 3 के त्रिक बनाने के बाद एक गुणनखंड 2 बचता है, अर्थात् 432 एक परिपूर्ण घन संख्या नहीं है।

3.9 किसी संख्या को पूर्ण घन संख्या बनाना

संख्या 432 के अभाज्य गुणनखंड बनाने पर संख्याओं 2 तथा 3 के त्रिक बनाने के बाद एक गुणनखंड 2 बचा था। अब यदि हम इस संख्या को 2 × 2 से गुणा कर दें तो हमारे पास 2 का एक त्रिक बन जाएगा तथा संख्या 432 × 2 × 2 = 1728 एक पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

हम संख्या 432 को 2 से भाग देकर भी परिपूर्ण घन संख्या बना सकते हैं, तब

$$432 \div 2 = \frac{2\times2\times2\times3\times3\times3\times2}{2}$$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 216$ एक परिपूर्ण घन संख्या होगी।

उदाहरण रूप में,

वह छोटी से छोटी सांख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 256 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन संख्या बन जाए–

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= 2^3 \times 2^3 \times 2 \times 2$$

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

यहां हम देखते हैं कि अभाज्य गुणनखंड के रूप में 2 के दो त्रिक बनाने के बाद 2 × 2 बच जाता है। अब यदि हम 256 को 2 से गुणा कर दें तो 2 का एक त्रिक और बन जाएगा तथा संख्या 256 × 2 = 512 एक पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

टिप्पणी

अत: अभीष्ट छोटी से छोटी संख्या 2 है।

इसी तरह एक अन्य उदाहरण को देखें–

वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 10584 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन होगा।

2	10584
2	5292
2	2646
3	1323
3	441
3	147
7	49
7	7
	1

$105684 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

$= 2^3 \times 3^3 \times 7 \times 7$

अत: 10584 को 7×7 या 49 से भाग देने पर भागफल 216, एक पूर्ण घन होगा।

अत: अभीष्ट छोटी से छोटी संख्या = 49

देखें आपने कितना सीखा 3.6

1. घन ज्ञात कीजिए–

   (i) +19 (ii) +11 (iii) +12 (iv) +10

2. निम्न में से कौन-सी संख्या पूर्ण घन है:

   (i) 2197 (ii) 36125 (iii) 43200 (iv) 13824

3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे 500000 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन हो जाए।

4. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 165375 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन संख्या बन जाए।

3.10 घनमूल

हम जानते हैं कि $5^2 = 25$ होता है, इसलिए हमने कहा था कि 25 का वर्गमूल 5 है।

यहां हम देख चुके हैं कि 4 का घन 64 है। इसे हम इस प्रकार भी कह सकते हैं कि 64 का घनमूल 4 है।

इसी तरह हम कह सकते हैं कि

1000 का घनमूल 10 है, क्योंकि 10 का घन 1000 है।

8 का घनमूल 2 है, क्योंकि 2 का घन 8 है।

किसी संख्या के घनमूल को संकेत $\sqrt[3]{}$ द्वारा दर्शाया जाता है। अत: $\sqrt[3]{27}$ का अर्थ '27 का घनमूल' तथा '$\sqrt[3]{125}$' का अर्थ '125 का घनमूल' है।

टिप्पणी

अतः: $\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt[3]{125} = 5$

3.11 अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा किसी पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करना

किसी संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए हम संख्या की अभाज्य गुणनखंडों के रूप में व्यक्त करते हैं तथा फिर एक जैसे अभाज्य गुणनखंडों का त्रिक बनाते हैं। घनमूल ज्ञात करने के लिए त्रिक से एक-एक संख्या लेकर उनका गुणनफल ज्ञात करते हैं।

आइए, एक उदाहरण देखें

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2\times2\times2\times3\times3\times3}$$

$$= \sqrt[3]{\underline{2\times2\times2}\times\underline{3\times3\times3}}$$

$$= 2 \times 3$$

$$= 6$$

इसी तरह 17576 का घनमूल ज्ञात करने के लिए

2	17576
2	8788
2	4394
13	2197
13	169
13	13
	1

$$\sqrt[3]{17576} = \sqrt[3]{2\times2\times2\times13\times13\times13}$$

$$= \sqrt[3]{\underline{2\times2\times2}\times\underline{13\times13\times13}}$$

$$= 2 \times 13$$

$$= 26$$

देखें आपने कितना सीखा 3.7

1. घनमूल ज्ञात कीजिए

   (i) 13824 (ii) 35937 (iii) 46656

   (iv) 343×216 (v) 125×1331

2. 5400 को किस छोटी से छोटी संख्या से भाग करने पर भागफल पूर्ण घन बन जाएगा? भागफल का घनमूल भी ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

आइए दोहराएं

- यदि किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा किया जाए तो प्राप्त गुणनफल उस संख्या का वर्ग कहलाता है।
- संख्या x के वर्ग को x^2 द्वारा प्रकट किया जाता है।
- धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों प्रकार की संख्याओं का वर्ग धनात्मक होता है।
- एक प्राकृत संख्या परिपूर्ण वर्ग कहलाती है, यदि वह किसी प्राकृत संख्या का वर्ग हो।
- किसी संख्या x का वर्गमूल वह संख्या है, जिसे स्वयं उसी संख्या से गुणा करने पर गुणनफल के रूप में संख्या x प्राप्त हो।
- x के वर्गमूल को $\sqrt{x}$ द्वारा प्रकट किया जाता है।
- करणी चिह्न $\sqrt{\ }$ को धनात्मक वर्गमूल के लिए प्रयोग किया जाता है।
- प्रत्येक धनात्मक संख्या के दो वर्गमूल होते हैं, जिनमें एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक होता है।
- किसी ऋणात्मक संख्या का हम वर्गमूल ज्ञात नहीं कर सकते।
- वर्गमूल ज्ञात करने की दो विधियां हैं-गुणनखंड विधि तथा विभाजन विधि।
- यदि a कोई पूर्णांक हैं तो a^3 इसका घन कहलाता है।
- यदि a कोई पूर्णांक हैं तो $a = x^3$ हो तो x संख्या a का घनमूल कहलाता है।
- धनात्मक संख्याओं के घन धनात्मक होते हैं तथा ऋणात्मक संख्याओं के घनमूल ऋणात्मक होते हैं।
- सम संख्याओं के घन सम तथा विषम संख्याओं के घन विषम होते हैं।

आइए अभ्यास करें

1. निम्न संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए:

   (i) 83 (ii) 139 (iii) –311

2. निम्न में से कौन-सी संख्याएं परिपूर्ण वर्ग हैं और कौन-सी परिपूर्ण वर्ग नहीं?

   (i) 441 (ii) 960 (iii) 1250 (iv) 2116

3. निम्न में से प्रत्येक का वर्गमूल गुणनखंड विधि द्वारा ज्ञात कीजिए:

   (i) 3364 (ii) 3025 (iii) 774400 (iv) 69696

4. निम्न में से प्रत्येक का वर्गमूल विभाजन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए:

   (i) 546121 (ii) 480249 (iii) 346921

5. एक लकड़ी के बक्से में 1024 संतरों को इस प्रकार लगाया जाता है कि इसकी प्रत्येक पंक्ति में संतरों की संख्या बक्से में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। प्रत्येक पंक्ति में संतरों की संख्या ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

6. 7056 सेबों को कुछ बक्सों में इस प्रकार भरा जाता है कि प्रत्येक बक्से में सेबों की संख्या बक्सों की संख्या के बराबर हैं। बक्सों की संख्या तथा प्रत्येक बक्से में सेबों की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. एक विद्यालय में गुजरात राहत कोष के लिए 63001 रुपये एकत्रित किए। यदि प्रत्येक विद्यार्थी ने जितने रुपये एकत्रित किए, उतनी ही विद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या हो तो विद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. एक वर्ग का क्षेत्रफल 65536 वर्ग से.मी. है। इसकी भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।
9. एक सेना में सिपाहियों को इस प्रकार खड़ा किया जाता है कि पंक्तियों की संख्या तथा प्रत्येक पंक्ति में सिपाहियों की संख्या बराबर है। ऐसा करने पर 16 सिपाही शेष बचते हैं। यदि सिपाहियों की कुल संख्या 5200 हो तो प्रत्येक पंक्ति में कितने सिपाही हैं?
10. घन ज्ञात करें:

    (i) 21 (ii) 25 (iii) 27 (iv) 40
11. घनमूल ज्ञात कीजिए:

    (i) 5832 (ii) 13824
12. एक घनाकार बक्से का आयतन 1331 घन मीटर है, बक्से की भुजा की माप ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें अपने कितना सीखा 3.1

1. (i) 81 (ii) 625 (iii) 64 (iv) 361

देखें अपने कितना सीखा 3.2

1. (i) 4489 (ii) 6889 (iii) 10201 (iv) 5041
2. 64 और 36
3. 48, 526 और 1250
4. 309, 4709 और 1111
5. $8^2 = 2 \times 32$ तथा $9^2 = 2 \times 40 + 1$

देखें अपने कितना सीखा 3.3

1. 36 2. 65 3. 224 4. 72 5. 400

देखें अपने कितना सीखा 3.4

1. 67 2. 248 3. 456 4. 561 5. 12349

देखें अपने कितना सीखा 3.5

1. 4 2. 64 3. 51 4. 190 मीटर

देखें अपने कितना सीखा 3.6

1. (i) 6589 (ii) 1331 (iii) 1728 (iv) 1000
2. (i) पूर्ण घन संख्या है। (ii) पूर्ण घन संख्या नहीं है।
   (iii) पूर्ण घन संख्या नहीं है। (iv) पूर्ण घन संख्या है।
3. 250 से
4. 49 से

देखें अपने कितना सीखा 3.7

1. (i) 24 (ii) 33 (iii) 36 (iv) 42 (v) 55
2. 200 से भाग करने पर, घनमूल = 3

आइए अभ्यास करें

1. (i) 6889 (ii) 16641 (iii) 96721
2. परिपूर्ण वर्ग : (i) 441 और (iv) 2116
   परिपूर्ण वर्ग नहीं : (ii) 960 और (iii) 1250
3. (i) 58 (ii) 55 (iii) 880 (iv) 264
4. (i) 739 (ii) 693 (iii) 589
5. 32
6. बक्सों की संख्या = 84
   एक बक्से में सेबों की संख्या = 84
7. 251
8. 256 से.मी.
9. 72
10. (i) 9261 (ii) 15625 (iii) 19683 (iv) 64000
11. (i) 18 (ii) 24
12. 11 मीटर

मॉड्यूल II

बीजगणित

अल-ख्वारिजमी की बहुत प्रसिद्ध पुस्तक हिसाब अल-जबर बॉल मुकाबलाह से हम अल-जबर का यूरोपीय रूप ऐलजबरा प्राप्त करते हैं। शीर्षक के अनुवाद का अर्थ पुनर्योग और समानयन का विज्ञान है। ये शब्द रैखिक और द्विघाती समीकरणों के हलों के विधिवत अध्ययन के संदर्भ में प्रयोग किए जाते हैं। उनकी ऐलजबरा की पुस्तक से गणित की इस शाखा का नाम प्राप्त होता है। इसके अतिरिक्त उच्च कोटि के भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट (एडी 476), ब्रह्मगुप्त (ए.डी. 598) महावीर (ए. डी. 850) ने भी ऐलजबरा के क्षेत्र में बहुत अहम् योगदान दिया है।

गणितज्ञ, खगोलशास्त्री तथा भूगोलशास्त्री मुहम्मद बिन मूसा अल-ख्वारिजमी का जन्म ए डी 770 के लगभग ओक्सस नदी के दक्षिण में फारस के एक छोटे से गांव (उजबेकिस्तान में स्थित, रवेवा) में हुआ।

इस मॉड्यूल में आप संख्याओं को अक्षरों से निरूपित करना सीखेंगे। इन अक्षरों को चर कहते हैं और ये विभिन्न संख्यात्मक मान होते हैं।

आप, चरों को संख्याओं से गुणा करना, सजातीय और विजातीय पदों में भेद करना, सजातीय पदों को जोड़ना और घटाना और दो अथवा अधिक चरों को गुणा करना, सीखेंगे। बीजीय व्यंजक की संकल्पना से आपका परिचय होगा और आप एकपद, द्विपद और त्रिपद की पहचान सीखेंगे। चर (चरों) के दिए गए मानों के लिए आप किसी व्यंजक का मान निकाल सकेंगे। आप बीजीय व्यंजकों (जिनमें तीन से अधिक पद नहीं हैं) पर जोड़ने, घटाने और गुणा करने की मौलिक संक्रियाएं कर पाएंगे।

आप तत्समक और समीकरण में भेद कर पाएंगे और आप एक चर वाले रैखिक समीकरण को हल करना भी सीखेंगे। आप दैनिक जीवन की साधारण समस्याओं को रैखिक समीकरणों की सहायता से हल करने की स्थिति में होंगे।

अंत में आप चार विशेष गुणनफल पढ़ेंगे और इनके प्रयोग से विशेष प्रकार के गुणनफलों को सरल करना और इनका मान ज्ञात करना भी सीखेंगे।

4

बीजगणित से परिचय

आपने पहले ही अंकगणित के मॉड्यूल का अध्ययन कर लिया है। अतः आप गणित में मूलभूत संक्रियाओं के बारे में जानते हैं। यह संक्रियाएं संख्याओं का योग, व्यवकलन, गुणा और भाग हैं। यदि ऐसा है तो आप संख्याओं के बारे में काफी जानकारी रखते हैं। बीजगणित में, हम संख्याओं और चिह्नों का प्रयोग कथनों को दर्शाने के लिए करते हैं। दूसरे शब्दों में, हम यह कह सकते हैं कि बीजगणित, अंकगणित का व्यापक रूप है, जिसमें संख्याओं के साथ अक्षरों का प्रयोग भी होता है।

बीजगणित में संख्याओं के साथ चिह्नों–जैसे कि x, y, z इत्यादि का प्रयोग करते हैं। ये चिह्न भी संख्याओं को दर्शाते हैं। चिह्नों का प्रयोग परिणामों को संक्षेप तथा व्यापक रूप में लिखने में हमारी सहायता करता है। वास्तविक जीवन में, हम बीजगणित की विधियों का प्रयोग दी गई सूचना से किसी समस्या को हल करने में करते हैं, जब हमें एक या दो अज्ञात संख्याएं दी गई हों।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- संख्याओं को अक्षरों द्वारा दर्शाना
- एक संख्या का अक्षर द्वारा गुणा या भाग
- सजातीय पदों का योग और व्यवकलन
- दो अक्षरों का गुणा

4.1 अचर और चर

दैनिक जीवन की परिस्थितियों में आपने देखा है कि एक घंटे में मिनटों की संख्या 60 है, एक सप्ताह में दिनों की संख्या 7 है, एक वर्ष में महीनों की संख्या 12 है। इन सभी सूचनाओं में मान निश्चित हैं।

आइए अब हम कुछ नए विचारों की खोज करें। आप यह भी जानते हैं कि वर्ष के सभी महीनों में दिनों की संख्या समान नहीं होती। कुछ महीने 30 दिनों के होते हैं तथा कुछ 31 दिनों के तथा फरवरी मास में 29 या 28 दिन होते हैं। फरवरी मास में 29 या 28 दिन का होना इस पर निर्भर करता है कि वर्ष लीप वर्ष है या नहीं। क्या आप सोचते हैं कि यह उदाहरण पहले

तीन उदाहरणों से किस प्रकार भिन्न है। पहले तीन उदाहरणों में मान निश्चित थे तथा सभी इन्हें जानते हैं। महीनों वाले उदाहरणों में फरवरी के अतिरिक्त शेष महीनों के दिनों की संख्या निश्चित है, जो कि वर्ष के प्रकार से स्वतंत्र है। इन सभी को संख्या से दर्शाया जा सकता है। ये सभी उदाहरण निश्चित संख्याओं के उदाहरण हैं। यह निश्चित संख्याएं अचर राशि कहलाती हैं।

एक अचर का सदा निश्चित संख्यात्मक मान होता है।

परंतु फरवरी के दिनों की संख्या तक तब ज्ञात नहीं होती, जब तक उसका वर्ष ज्ञात न हो। क्या आप कोई दूसरा उदाहरण सोच सकते हैं, जिसमें निश्चित मान न हो? क्या आपने भिन्न-भिन्न दुकानों में एक ही वस्तु के मूल्यों की जांच की है? यह सभी दुकानों में एक नहीं होगी, ऐसा संभव है। इसी प्रकार सभी समय पर सभी स्थानों का तापमान समान नहीं होगा। यह दिन और रात के समय में भिन्न है।

अतः फरवरी के दिनों की संख्या, भिन्न-भिन्न दुकानों पर वस्तु का मूल्य, भिन्न-भिन्न समय और स्थानों पर तापमान एक निश्चित संख्या द्वारा निर्धारित नहीं होते। ये चर कहलाते हैं।

एक चर के भिन्न-भिन्न संख्यात्मक मान हो सकते हैं।

चरों को अक्षरों $x, y, z, \ldots$ इत्यादि द्वारा प्रकट किया जाता है।

टिप्पणी : एक चर का निर्धारण करने वाले अक्षर को मूलाक्षर संख्या कहते हैं।

आइए हम निम्नलिखित स्थिति का अवलोकन करें, जहां पर आपको एक अक्षर की आवश्यकता होगी।

मान लो कि आपके पास कुछ टॉफियां हैं। टॉफियों की वास्तविक संख्या अज्ञात है। यदि हम इसमें 5 और टॉफियां मिला दें, तो आपके पास कितनी टॉफियां होंगी?

यह होंगी (टॉफियों की संख्या + 5) टॉफियां

यदि आप इनमें से 3 टॉफी खा लें, तो आपके पास जो टॉफियां बचेंगी, वह हैं :

(टॉफियों की संख्या + 5 – 3) टॉफियां

अर्थात् (टॉफियों की संख्या + 2) टॉफियां

यदि आपके पास आरंभ में 7 टॉफियां होतीं, तो अंत में आपके पास (7 + 2) टॉफियां बचतीं। इसी प्रकार यदि आपके पास आरंभ में 10 टॉफियां होतीं, तो आपके पास अंत में (10 + 2) टॉफियां बचतीं। क्या आप बता सकते हैं कि यदि आरंभ में आपके पास 8 टॉफियां होतीं, तो अंत में आपके पास कितनी टॉफियां बचतीं? उत्तर बड़ा सरल है (8 + 2) टॉफियां।

यह संख्या 'टॉफियों की संख्या' पर निर्भर करती है, जो आपके पास आरंभ में थी। क्योंकि टॉफियों की वह संख्या अज्ञात है, जो आरंभ में थी, तो टॉफियों की संख्या को बार-बार लिखने के स्थान पर हम इसे n द्वारा प्रकट करते हैं, जबकि n कोई संख्या है। अतः अंत में बची टॉफियों की संख्या $n + 2$ होगी, जबकि n आरंभ में टॉफियों की संख्या को दर्शाता है। n एक चर राशि कहलाती है। अतः एक अक्षर (या चर) को उस संख्या के लिए प्रयोग किया जा सकता है,

जिसका वास्तविक मान अज्ञात है। दूसरे शब्दों में बीजगणित में, अक्षर, संख्याओं को दर्शाते हैं।

इसी प्रकार फरवरी के दिनों की संख्या, एक वस्तु का भिन्न-भिन्न दुकानों पर मूल्य, भिन्न-भिन्न समय और स्थानों पर तामपानों को क्रमश: d, p और t द्वारा दर्शाया जा सकता है। यह आवश्यक नहीं है कि हम शब्द का प्रथम अक्षर ही लें। आप इसे किसी भी अक्षर द्वारा प्रकट कर सकते हैं।

आइए अब हम निम्नलिखित स्थितियों को अक्षरों द्वारा व्यक्त करें।

4.2 एक संख्या का दुगुना

अंकगणित में, यदि आपको 5 का दुगुना या दो गुना ज्ञात करने के लिए कहा जाए तो आपका उत्तर क्या होगा?

बिना हिचकिचाहट के आप कह सकते हैं कि यह 10 है, जिसे 2×5 द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार 4 का दो गुना 2×4 या 8 है तथा 10 का दो गुना 2×10 या 20 है।

आइए इसे हम सारणी रूप में लिखते हैं :

कितने गुना	दी गई संख्या	मान
2 गुना	1	2×1
	2	2×2
	3	2×3
	..	..
	10	2×10
		....

क्या आप इस सारणी में प्रतिरूप को देखते हैं? आप पाएंगे कि 2 को सदैव संगत संख्या क्रमश: 1, 2, 3, ..., 10 (जो कि दी गई संख्या है) से गुणा किया जा रहा है।

अर्थात् 2×1

2×2

2×3

...

2×10

...

अतः हम कह सकते हैं कि अज्ञात संख्या का दुगुना

= 2 × अज्ञात संख्या

आइए हम अज्ञात संख्या को n द्वारा प्रकट करें।

तब अज्ञात संख्या का दो गुना = $2 \times n = 2n$

एक संख्या और एक अक्षर के गुणा या दो अक्षरों के गुणा को प्रायः उनके बीच गुणा के चिह्न के बिना लिखा जाता है।

प्रायः हम संख्या और अक्षर (चर) या दो अक्षरों (चरों) के बीच गुणा का चिह्न नहीं लिखते।

अब एक संख्या के दो गुना के स्थान पर हम संख्या का तीन गुना ज्ञात करना चाहें, तो इसका क्या प्रतिरूप होगा? पहले की तरह 'अज्ञात संख्या' n को 3 से गुणा किया जाएगा। हमें $3 \times n$ प्राप्त होगा। इसे 3n द्वारा भी प्रकट किया जा सकता है।

अब आप सोचिए कि संख्या n का 6 गुना पाने के लिए क्या प्रतिरूप होगा?

आइए अब हम एक उदाहरण और लें। माना कि आपके पास 12 मीटर लंबी छड़ है।

यदि आप इसको दो समान भागों में काटें, तो प्रत्येक भाग की लंबाई क्या होगी?

प्रत्येक भाग 6 मीटर लंबा होगा।

6 मीटर को $12 \div 2$ मीटर अथवा $\frac{1}{2}\times 12$ मीटर द्वारा भी प्रकट किया जा सकता है, जो कि छड़ की लंबाई है।

यदि हम छड़ की लंबाई को n मान लें, तो छड़ की लंबाई का $\frac{1}{2}$ भाग = $\frac{1}{2}n$ होगा।

इसी प्रकार n का $\frac{1}{3}$ या एक-तिहाई भाग = $\frac{1}{3}n$

और $\frac{1}{4}$ भाग = $\frac{1}{4}n$ होगा।

4.3 एक वर्ग का परिमाप

आइए हम निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें। प्रतिदिन वैंकटेश अपने घर के पास एक वर्गाकार पार्क में प्रातः की सैर को जाता है। वह प्रतिदिन पार्क के चारों ओर का एक चक्कर लगाता है। यदि पार्क की प्रत्येक भुजा की लंबाई 1 कि.मी. हो, तो क्या आप इसकी गणना कर

सकते हैं कि वह प्रत्येक सुबह कितनी दूरी चलता है? यह दूरी जानने के लिए आप चारों भुजाओं की लंबाइयों का योग ज्ञात करते हैं। इस अवस्था में पार्क की चारों भुजाओं की मापों का योग

= (1+1+1+1) कि.मी.

= 4 कि.मी.

चित्र 4.1

अत: वैंकटेश प्रतिदिन 4 कि.मी. चलता है।

इस वर्ग की चारों भुजाओं की लंबाइयों का योग इसका परिमाप कहलाता है।

इस उदाहरण में वैंकटेश द्वारा चली गई कुल दूरी

= वर्गाकार पार्क का परिमाप

= 4 कि.मी.

यदि पार्क की प्रत्येक भुजा 2 कि.मी. होती, तब इसका परिमाप (2+2+2+2) कि.मी. = 8 कि.मी. होता, जो कि लंबाई 2 कि.मी. का 4 गुना है।

पुन: यदि पार्क की प्रत्येक भुजा की लंबाई 5 कि.मी. होती, तो इसका परिमाप (5+5+5+5) कि.मी. = 20 कि.मी. होता, जो कि लंबाई 5 कि.मी. का 4 गुना है।

आइए अब हम भिन्न-भिन्न लंबाइयों वाली भुजा के वर्गों के परिमापों की गणना करें:

भुजा की लंबाई	1 कि.मी.	2 कि.मी.	5 कि.मी.	10 कि.मी.
परिमाप	4 कि.मी.	8 कि.मी.	20 कि.मी.	40 कि.मी.

यदि आप इस प्रतिरूप का अवलोकन करें, तो आप पाएंगे कि यह प्रत्येक अवस्था में भुजा की लंबाई का 4 गुना है।

4 कि.मी. को 4×1 कि.मी. लिखा जा सकता है।

8 कि.मी. को 4×2 कि.मी. लिखा जा सकता है।

20 कि.मी. को 4×5 कि.मी. लिखा जा सकता है।

40 कि.मी. को 4×10 कि.मी. लिखा जा सकता है।

अत: यदि हम वर्ग की भुजा की लंबाई को L द्वारा प्रकट करें तो वर्ग का परिमाप $4 \times$ (भुजा की लंबाई) = $4L$ होगा।

L भुजा वाले वर्ग का परिमाप = $4L$

अच्छी तरह समझने के लिए, हम कुछ उदाहरण हल करते हैं।

उदाहरण 4.1 : अक्षरों के प्रयोग द्वारा निम्न स्थितियों को व्यक्त कीजिए:

(a) रमन की आयु उसकी छोटी बहन की वर्तमान आयु की दो गुनी है

(b) एक छड़ की लंबाई का एक-चौथाई

(c) एक बच्चे का किराया दो स्टेशनों के बीच की दूरी के किराये का $\frac{1}{2}$ भाग

हल: (a) माना रमन कि छोटी बहन की आयु = x वर्ष

$\therefore$ रमन की वर्तमान आयु = 2 × (छोटी बहन की वर्तमान आयु)

= 2 × (x वर्ष)

= 2x वर्ष

(b) माना छड़ की लंबाई = L

छड़ की लंबाई का एक-चौथाई = $\frac{1}{4}$ × (छड़ की लंबाई)

$= \frac{1}{4} \times L$

$= \frac{1}{4} L$

(c) माना दो स्टेशनों के बीच का किराया = R रुपये

बच्चे के लिए किराया = किराये का $\frac{1}{2}$ भाग = $\frac{1}{2} \times R$ रुपये

= $\frac{1}{2}R$ रुपये

देखें आपने कितना सीखा 4.1

1. अक्षरों का प्रयोग करके निम्नलिखित अवस्थाओं को व्यक्त कीजिए:

(a) एक वृत्त का व्यास इसकी त्रिज्या का दुगुना होता है।

(b) किसी व्यक्ति की आयु का एक-तिहाई।

(c) यदि आप एक कि.ग्रा. चावल का मूल्य जानते हो, तो 5 कि.ग्रा. चावल का मूल्य ज्ञात करो।

टिप्पणी

4.4 अक्षरों और संख्याओं पर मौलिक संक्रियाएं

आप संख्याओं में मौलिक संक्रियाएं संकलन (योग), व्यवकलन, गुणा और भाग को अंकगणित में पहले ही जानते हैं। आप सुगमता से कह सकते हैं कि 2 और 3 का योग 5 है। 5 और 3 का अंतर 5 – 3 = 2 है तथा 5 और 2 का गुणनफल 5 × 2 = 10 है। हम इन संक्रियाओं को बीजगणित में भी कर सकते हैं, परंतु इनके निरूपण भिन्न हैं। आइए देखें कि यह कैसे किया जा सकता है।

4.4.1 संकलन और व्यवकलन

मान लीजिए कि आपने बाजार से अपनी बहन के लिए 3 गुब्बारे और 2 खिलौने खरीदे। यदि 3 गुब्बारों का मूल्य 3 रुपये हो और 2 खिलौनों का मूल्य 10 रुपये हो, तो क्या आप गणना कर सकते हैं कि आपने खरीदारी पर कितना धन व्यय किया?

चित्र 4.2

उत्तर जानने के लिए आपको 3 गुब्बारों के मूल्य में 2 खिलौनों के मूल्य का योग करना है।

अर्थात् 3 रुपये + 10 रुपये = 13 रुपये

आइए हम देखें कि यदि 3 गुब्बारों का मूल्य बदलता रहे, परंतु 2 खिलौनों का मूल्य स्थिर हो तो क्या होगा?

3 गुब्बारों का मूल्य	2 खिलौनों का मूल्य	कुल व्यय
(i) ₹ 6	₹ 10	₹ 16
(ii) ₹ 10	₹ 10	₹ 20
(iii) ₹ 12	₹ 10	₹ 22

यदि आप प्रतिरूप का अवलोकन करें, तो आप पाएंगे कि 3 गुब्बारों के बदलते मूल्य के कारण (क्योंकि 2 खिलौनों का मूल्य वही है) कुल व्यय एक समान नहीं है। क्योंकि 3 गुब्बारों का मूल्य बदलता है, तो हम इसे अक्षर ₹ x मान लें, जबकि x चर है।

कुल व्यय = ₹ x + ₹ 10 = ₹ $(x + 10)$

बीजगणित में चर और संख्या 10 के योग को $x + 10$ या $10 + x$ लिखा जाता है। (अंकगणित में योग का क्रम बदलने वाले गुण-धर्म को याद करो)। इसी प्रकार संख्या 7 से t अधिक संख्या = $7 + t$ या $t + 7$

अब हम पुनः अपने उदाहरण को लेते हैं और खिलौनों के मूल्य को भी बदलते हैं।

3 गुब्बारों का मूल्य	2 खिलौनों का मूल्य	कुल व्यय
(i) ₹ x	₹ 12	₹ x + ₹ 12 = ₹ $(x + 12)$
(ii) ₹ x	₹ 16	₹ x + ₹ 16 = ₹ $(x + 16)$
(iii) ₹ x	₹ 20	₹ x + ₹ 20 = ₹ $(x + 20)$

इस अवस्था में खिलौनों के बदलते मूल्य के कारण कुल व्यय एक समान नहीं है, क्योंकि 2 खिलौनों का मूल्य बदल रहा है, इसे हम दूसरे अक्षर माना ₹ y द्वारा प्रकट करते हैं।

कुल व्यय ₹ x + ₹ y = ₹ $(x + y)$ होगा।

दो चरों x और y के योग को $x + y$ लिखा जाता है।

संख्याओं में घटाने की क्रिया को याद कीजिए। यहां पर $15 - 3$, 15 से 3 कम संख्या को दर्शाता है या 15 में से 3 घटाने को दर्शाता है। इसी प्रकार बीजगणित में, अक्षर y और 3 के अंतर या y से 3 कम संख्या को $(y - 3)$ द्वारा दर्शाया जाता है। दूसरे शब्दों में, अचर राशि 3 को y में से घटाकर $(y - 3)$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार एक चर x में से दूसरे चर y को घटाने पर प्राप्त संख्या को $x - y$ द्वारा दर्शाया जाता है।

4.4.2 गुणा और भाग

हम जानते हैं कि x के तीन गुने को $3x$ द्वारा प्रकट करते हैं और t के 5 गुने को $5t$ द्वारा प्रस्तुत करते हैं। यह एक चर राशि को किसी संख्या से गुणा के उदाहरण हैं। बीजगणित में हम चर और संख्या के बीच या दो चरों के बीच गुणा का चिह्न नहीं लिखते।

खंड 4.2 में हमने सीखा है कि n के दुगुने को $2n$ द्वारा लिखते हैं।

आइए देखिए कि संख्या n का 1, 3, 4, 5, ... 10 गुना क्या होगा।

दी गई संख्या	कितनी बार	मान
n	1	$1 \times n$
	3	$3 \times n$
	4	$4 \times n$
	5	$5 \times n$
	....	....
	....	....
	10	$10 \times n$

क्या आप ऊपर दी गई सारणी में कोई प्रतिरूप देखते हैं? आप पाएंगे कि 1, 3, 4, 5, ... 10 को सदा संख्या n से गुणा किया जाता है। अतः 'कितनी बार' की बदलती हुई संख्या से दी गई संख्या को गुणा करने पर संख्या का मान एक ही नहीं होता। 'कितनी बार' की संख्या चर है, अतः इसे दूसरे चर m द्वारा प्रकट करते हैं।

दो चरों m और n का गुणनफल mn होता है।

आपने अंकगणित में दो संख्याओं में विभाजन क्रिया को पढ़ा है। दो संख्याओं को भाग देने पर, जैसे कि $25 \div 2$, 25 को 2 से भाग देने को दर्शाता है तथा इसे $\frac{25}{2}$ (25 बटा 2) लिखा जाता है।

इसी प्रकार बीजगणित में, किसी अक्षर को किसी संख्या से या एक अक्षर को दूसरे अक्षर से भाग देने के लिए चिह्न ÷ का प्रयोग करते हैं।

$x \div 6$ को x भाग 6 पढ़ा जाता है तथा इसे $\frac{x}{6}$ द्वारा दर्शाया जाता है। इसी प्रकार $10 \div y$ को $\frac{10}{y}$ द्वारा दर्शाते हैं तथा इसे 10 भाग y पढ़ते हैं।

जब किसी x को y द्वारा भाग देते हैं तो इसे हम $\frac{x}{y}$ द्वारा दर्शाते हैं तथा इसे x भाग y पढ़ते हैं।

4.5 पद और गुणांक

एक संख्या, एक मूलाक्षर संख्या या संख्याओं तथा मूलाक्षर संख्याओं में गुणा और भाग के संयोजन को पद कहते हैं।

पदों के उदाहरण हैं: $5, x, -3x,$ और $\frac{5}{x}$

एक पद में चर के अतिरिक्त चिह्न के साथ संख्या को पद में चर का गुणांक कहते हैं।

उदाहरणार्थ: $-3x$ में x का गुणांक -3 है। इसी प्रकार $\frac{x}{3}$ में x का गुणांक $\frac{1}{3}$ है, परंतु $\frac{5}{x}$ में, $\frac{1}{x}$ का गुणांक 5 है, क्योंकि $\frac{5}{x}$ को $5 \times \left(\frac{1}{x}\right)$ लिख सकते हैं।

4.6 सजातीय तथा विजातीय पद

आप 2 सेबों और 3 सेबों को मिलाकर 5 सेब कह सकते हैं, जबकि आप 2 केलों और 1 खिलौने को इकट्ठा नहीं कर सकते हैं। इसी प्रकार x और 2x सजातीय हैं और हम उन्हें इकट्ठा कर सकते हैं, परंतु 2x और 3y विजातीय हैं तथा इनका योग $2x + 3y$ है।

$x, 3x, \frac{x}{3}$ पदों पर ध्यान दो, जहां कि प्रत्येक में अक्षर संख्या (चर) x है। इन्हें हम **सजातीय पद** कहते हैं।

अत: दो या अधिक पद सजातीय कहलाते हैं, यदि उनमें चर समान हों, चाहें उनके गुणांक कुछ भी हों।

दो या अधिक पद सजातीय कहलाते हैं यदि वह अधिक-से-अधिक केवल संख्यात्मक गुणांकों में ही भिन्न हों।

टिप्पणी

पदों 3t और 7z को देखो। इनमें चर राशियाँ भिन्न हैं, इन्हें विजातीय पद कहते हैं।

पद, जिनमें चर समान न हों, विजातीय पद कहलाते हैं।

उदाहरण 4.2 : निम्न को संख्या और अक्षरों के प्रयोग द्वारा व्यक्त कीजिए:

(i) दो संख्याओं p और q का योग कीजिए।

(ii) z से 2 घटाइए।

(iii) 7 और z के गुणनफल में 3 योग कीजिए।

(iv) x को 3 से गुणा कर गुणनफल में से 2 घटाइए।

(v) p और q के अंतर को 3 से भाग कीजिए।

हल : (i) अभीष्ट योग $p+q$ है।

(ii) अभीष्ट व्यवकलन $z-2$ है।

(iii) 7 और z का गुणनफल 7z है और 3 जोड़ने पर यह $7z+3$ हो जाएगा।

(iv) x और 3 का गुणनफल 3x है, इसमें से 2 घटाने पर 3x - 2 आएगा।

(v) p और q का अंतर $p-q$ है।

$p-q$ को 3 से भाग करने पर यह $\frac{p-q}{3}$ होगा।

$\frac{p-q}{3}$ अभीष्ट उत्तर है।

उदाहरण 4.3 : निम्न में प्रत्येक पद के गुणांक लिखिए:

$$3z, -5t, \frac{3}{5}q, 7.5m$$

हल : पद 3z में z का गुणांक 3 है, क्योंकि इसमें केवल z ही चर राशि है तथा 3 एक संख्या है।

पद –5t में, t का गुणांक –5 है।

पदों $\frac{3}{5}q$ और 7.5 m में q और m के गुणांक क्रमशः $\frac{3}{5}$ और 7.5 हैं।

आप देखते हैं कि गुणांक चिह्न के साथ लेते हैं।

उदाहरण 4.4 : निम्नलिखित पदों के युग्मों में सजातीय तथा विजातीय पदों की पहचान कीजिए।

(i) 7d और $\frac{1}{7}d$, 3x और $-\frac{3}{5}y$, $\frac{7}{10}q$ और $-\frac{1}{5}q$

(ii) b और $-\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}m$ और m, $\frac{2}{3}y$ और $\frac{1}{2}z$

हल : (i) सजातीय पद हैं : 7d और $\frac{1}{7}d$; $\frac{7}{10}q$ और $-\frac{1}{5}q$

जबकि विजातीय पद हैं 3x और $-\frac{3}{5}y$

(ii) $\frac{1}{4}m$ और m सजातीय हैं तथा b और $-\frac{1}{3}a$, $\frac{2}{3}y$ और $\frac{1}{2}z$ विजातीय हैं।

4.6.1 सजातीय पदों का संकलन

सजातीय पदों का संकलन करते समय हमें प्रत्येक पद के गुणांकों का योग करना होता है। आप निम्नलिखित नियमों पर ध्यान दीजिए:

उदाहरणार्थ $(+5) + (+3) = 5 + 3 = 8$

$(+5) + (-3) = 5 - 3 = 2$

$(-5) + (+3) = -5 + 3 = -2$

$(-5) + (-3) = -5 - 3 = 8$

उदाहरण 4.5 : प्रत्येक में पदों का योग ज्ञात कीजिए:

(i) x, 2x

(ii) 5x, –2x

हल : (i) x और 2x में x के गुणांक क्रमशः 1 और 2 हैं।

गुणांकों का योग =1+2=3

$\therefore\ x + 2x = (1 + 2)\,x = 3x$

$\therefore$ अभीष्ट योग = 3x

(ii) 5x और –2x में x के गुणांक क्रमश: 5 और -2 हैं।

गुणांकों का योग = 5 + (-2) = 5 - 2 = 3

$\therefore$ 5x + (–2x) = (5 – 2) x = 3x

4.6.2 सजीताय पदों का व्यवकलन

सजातीय पदों का व्यवकलन, पदों के संकलन की भांति किया जाता है। व्यवकलन में निम्न नियमों का पालन होता है:

उदाहरणार्थ : (+5)-(+3) = 5-3

(+5)-(-3) = 5+3=8

(-5)-(+3) = -5-3=-8

(-5)-(-3) = -5+3=-2

उदाहरण 4.6: निम्नलिखित में से प्रत्येक में, पहले पद में से दूसरे पद को घटाइए:

(i) x, 2x

(ii) 5x, –2x

हल : (i) x और 2x में x के गुणांक क्रमश: 1 और 2 हैं।

गुणांकों का अंतर = 1-2 = -1

$\therefore$ x – 2x = (1 – 2) x = – x

$\therefore$ अभीष्ट अंतर = –x

(ii) 5x और –2x में x के गुणांक क्रमश: 5 और -2 हैं।

गुणांकों का अंतर = 5 - (-2) = 5 + 2 = 7

$\therefore$ 5x – (–2x) = (5 + 2)x = 7x

4.6.3 चरों की गुणा

आप जानते हैं कि गुणा बार-बार योग की क्रिया का दूसरा रूप है। अत: योग संक्रिया के नियम गुणा में भी सत्य हैं। आपने यह भी पढ़ा है कि जब संख्या को उसी संख्या से गुणा किया जाता है, तो इसे घातांक रूप में भी लिख सकते हैं।

अत: 3 × 3 को 3^2 द्वारा प्रकट किया जा सकता है।

इसे '3 की घात 2' पढ़ा जाता है।

4 × 4 × 4 को 4^3 द्वारा लिखा जाता है। इसे 4 की घात 3 पढ़ा जाता है।

इसी प्रकार बीजगणित में,

$x \times x = x^2$ इसे x वर्ग या x की घात 2 पढ़ा जाता है।

$y \times y \times y \times y = y^4$ और इसे y की घात 4 पढ़ा जाता है।

x^2 में, x को आधार और 2 को घातांक या x की घात कहते हैं। y^4 में, y आधार और 4 को y की घात कहते हैं। ऊपर के उदाहरणों में, केवल एक चर राशि है। आइए हम दो या अधिक उन पदों का गुणा करने की प्रक्रिया सीखें, जहां पर दो और अधिक चर राशियां हों।

उदाहरण के लिए $3x \times 5x \times y \times z$

आपको निम्न विधि अपनानी होगी :

(i) सभी संख्याओं को चिह्नों सहित गुणा कीजिए $3 \times 5 = 15$

(ii) आवर्ती चरांकों की पहचान कीजिए $15x \times x \times y \times z$ में x आवर्ती चरांक है।

(iii) उसी चर के घातांकों का योग कीजिए $15x^{1+1}\, yz \qquad (x \times x = x^{1+1} = x^2)$

हमें अभीष्ट गुणनफल $15x^2yz$ प्राप्त हुआ।

इसी प्रकार $-7x \times y^2 \times 5z$ का गुणनफल

$$= \{-7 \times 5\} x \times y^2 z$$
$$= -35\, xy^2 z$$

आप देखेंगे कि संख्याओं का गुणा निम्न नियमों का पालन करता है:

$(+) \times (+) = (+)$	उदाहरणार्थ :	$(+2)\times(+3) = +6$
$(+) \times (-) = -$		$(+2)\times(-3) = -6$
$(-) \times (+) = -$		$(-2)\times(+3) = -6$
$(-) \times (-) = +$		$(-2)\times(-3) = +6$ इत्यादि

उदाहरण 4.7 : प्रत्येक में पदों का गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(a) $4x$ और $3y$

(b) $25p$ और $-\frac{1}{5}p$

(c) $-\frac{2}{3}r^2$ और $-3\, r^3$

(d) $-\frac{2}{3}s$ और $-\frac{3}{2}t$

हलः

(i) अभीष्ट गुणनफल $= 4x \times 3y$

$= (3 \times 4)\ x \times y = 12\ xy$

(ii) अभीष्ट गुणनफल $= 25p \times \left(-\frac{1}{5}p\right)$

$= \left\{25 \times \left(-\frac{1}{5}\right)\right\} p^{1+1}$

$= -5\ p^2 \quad \left[\therefore 25 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -5\right]$

(iii) अभीष्ट गुणनफल $= \frac{-2}{3} r^2 \times (-3r^3)$

$= \left\{\frac{-2}{3} \times (-3)\right\} r^{2+3}$

$= 2\ r^5$

(iv) अभीष्ट गुणनफल $= -\frac{2}{3} s \times \left(-\frac{3}{2} t\right)$

$= \left\{\frac{-2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)\right\} st$

$= st$

देखें आपने कितना सीखा 4.2

1. निम्नलिखित गुणनफल को प्रसार रूप में लिखिए:

   (a) $3x^3$ (b) $8a^2b$ (c) $-7a^2bc^3$

2. निम्नलिखित में पदों को गुणा कीजिए:

   (a) $2q^2,\quad 11t^3$

   (b) $2m^3,\quad -3t$

   (c) $-2y^2,\quad \frac{1}{2}z^2$

   (d) $-\frac{1}{3}b^2,\quad -12a^2$

आइए दोहराएं

- एक अचर राशि का निश्चित मान होता है।
- चर के भिन्न-भिन्न मान होते हैं।
- चर को दर्शाने के लिए अक्षरों x, y, z, ... का प्रयोग करते हैं।
- प्राय: हम संख्या और चर के बीच गुणा का चिह्न नहीं लगाते। इसी प्रकार दो चरों के बीच भी गुणा का चिह्न नहीं लगाते।
- एक पद में चर को छोड़कर चिह्न सहित संख्या को चर का गुणांक कहते हैं।
- दो पद सजातीय होते हैं, यदि वे अधिक-से-अधिक केवल संख्यात्मक गुणांक में भिन्न हों।
- दो पद विजातीय होते हैं, यदि वे चर में भिन्न हों।
- दो सजातीय पदों के संकलन और व्यवकलन में उनके संगत संख्यात्मक गुणांकों को जोड़ा या घटाया जाता है।
- किसी पद $3x^2$ में 3 को x^2 का गुणांक कहा जाता है, x^2 में x को आधार और 2 को x की घात कहते हैं।
- दो या अधिक चरों को गुणा करते समय निम्न चरणों को करना होता है:

  (i) सभी गुणांकों को चिह्नों सहित गुणा करो,

  (ii) एक ही चर के घातांकों का योग करो,

  (iii) दूसरे चरों को वैसा ही रखो, जैसे वे हैं।

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित को कथनों में लिखिए:

   (a) $7x$ (b) $x + 5$ (c) $\frac{x}{3}$ (d) $a + 2b$

   (e) $7x - 11$

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (a) एक लड़की की आयु x वर्ष है। 2 वर्ष के बाद उसकी आयु .... वर्ष होगी।

   (b) विनीत की आयु x वर्ष है। y वर्ष के बाद उसकी आयु .... वर्ष होगी।

   (c) एक लड़के की आयु y वर्ष है। 5 वर्ष पहले उसकी आयु .... वर्ष थी।

टिप्पणी

(d) विजय ने अपने जन्मदिन पर 'x' टॉफियाँ 'y' बच्चों में बांटी। प्रत्येक बच्चे को .... टॉफी मिली।

(e) प्रीति की आयु अंजु की आयु के तीन गुने से 2 वर्ष अधिक है। यदि अंजु की वर्तमान आयु t वर्ष है, तो प्रीति की आयु .... वर्ष है।

3. निम्नलिखित स्थितियों को मौलिक संक्रियाओं द्वारा व्यक्त कीजिए:

(a) x और t के योग में से 5 घटाइए।

(b) q के तीन गुने में p का 2 गुना जोड़िए।

(c) a और b के गुणनफल के तीन गुने को d के आधे में जोड़िए।

(d) l और m के अंतर को p और q के अंतर से भाग दीजिए।

4. निम्नलिखित में से सजातीय तथा विजातीय पदों को पहचानिए:

(a) $x, -2x$ (b) $x, -6z$ (c) $\frac{1}{2}x, -3y$

(d) $\frac{1}{3}n, -\frac{1}{5}n$ (e) $2x^2, 3x$ (f) $5y^2, -7y^2$

5. निम्नलिखित में पदो का योग कीजिए:

(a) $\frac{1}{2}q, \quad \frac{1}{2}q$

(b) $x, -2y$

(c) $3a, -b, -2b$

(d) $7, 3x, 2$

6. निम्नलिखित में पदों को गुणा कीजिए:

(a) p, r

(b) $y, -x$

(c) $-a^2, a$

(d) $-\frac{2}{5}x^2, -\frac{5x}{2}$

टिप्पणी

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 4.1

1. (a) वृत्त का व्यास $= 2 \times r = 2r$ जबकि r त्रिज्या है।

   (b) माना एक व्यक्ति की आयु y वर्ष है।

   $\therefore$ व्यक्ति की आयु का $\frac{1}{3}$ भाग $= \frac{1}{3} \times y$ वर्ष $= \frac{1}{3} y$ वर्ष

   (c) माना 1 कि.ग्रा. चावल का क्रय मूल्य = ₹ R

   $\therefore$ 5 कि.ग्रा. चावल का क्रय मूल्य = ₹ $R \times 5$

   = ₹ 5R

देखें आपने कितना सीखा 4.2

1. (a) $3 \times x \times x \times x$

   (b) $8 \times a \times a \times b$

   (c) $-7 \times a \times a \times b \times c \times c \times c$

2. (a) $22q^2t^3$ (b) $-6m^3t$ (c) $-y^2z^2$ (d) $4a^2b^2$

आइए अभ्यास करें

1. (a) x और 7 का गुणनफल (b) x और 5 का योगफल

   (c) x को 3 से भाग (d) b के दुगुने में a का योग

   (e) x के 7 गुने में से 11 घटा

2. (a) $x + 2$ (b) $x + y$ (c) $y - 5$ (d) $\frac{x}{y}$ (e) $3t + 2$

3. (a) $x + t - 5$ (b) $3q + 2p$ (c) $\frac{1}{2}d + 3ab$ (d) $\frac{(1-m)}{p-q}$

4. सजातीय युग्म हैं : (a), (d) और (f)

   विजातीय युग्म हैं : (b), (c) और (e)

5. (a) q (b) $x - 2y$ (c) $3a - 3b$ (d) $3x + 9$

6. (a) pr (b) $-xy$ (c) $-a^3$ (d) x^3

5

बीजीय व्यंजक एवं संक्रियाएँ

जब आप कुछ कहना चाहते हैं, तो अपने विचार बताने के लिए आप अभिव्यक्ति प्रयोग में लाते हैं। 'मैं गणित पढ़ता हूं' हिंदी में एक अभिव्यक्ति है। '$4 + 10$', '$6 - 3$' गणितीय अभिव्यक्ति के उदाहरण हैं। इन्हें गणितीय व्यंजक भी कहते हैं।

ठीक इसी प्रकार $4x$, $x + y$, $ab - 8$, $a^2x^2 + yz$ बीजीय व्यंजकों के उदाहरण हैं।

इस पाठ में आप पढ़ेंगे:

- बीजीय व्यंजक के पद
- किसी पद, जिसमें दो अथवा अधिक चर हैं, के गुणांक
- भिन्न प्रकार के बीजीय व्यंजक
- चर के किसी दिए गए मान के लिए व्यंजक का मान ज्ञात करना।
- बीजीय व्यंजकों के संकलन और व्यवकलन करने की विधियां
  (i) सजातीय पदों के समूह बनाकर
  (ii) स्तंभ विधि से
- दो बीजीय व्यंजकों का गुणा करना

5.1 बीजीय व्यंजक की अवधारणा

आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें। अपने दैनिक जीवन में आप कई बार बाजार जाते हैं। मान लीजिए कि आपने 2 कि.ग्रा. चावल, 5 कि.ग्रा. आटा और 1 कि.ग्रा. चने की दाल खरीदी है। यह भी मानिए कि चावल का भाव ₹ x प्रति कि.ग्रा., आटे का भाव ₹ y प्रति कि.ग्रा. तथा चने की दाल का भाव ₹ z प्रति कि.ग्रा. है। क्या आप बता सकते हैं कि आपने कुल कितनी राशि व्यय की? आपने, इन सभी में ₹ $(2x + 5y + z)$ व्यय किए।

यहां $2x + 5y + z$ एक बीजीय व्यंजक है। अत: बीजीय व्यंजक चार मूल संक्रियाओं द्वारा अचरों और चरों के संयोजन से प्राप्त होता है।

टिप्पणी

$2x$, $3t - 4s$, $p + 3q - 3n$, $x^2y + y^2z$, $x + \frac{1}{x}$, $x^2y^2 + y^2z^2 - z^2x^2$, सभी बीजीय व्यंजकों के उदाहरण हैं।

व्यंजक $x^2y^2 + y^2z^2 - z^2x^2$ पर ध्यान दें। इसमें x^2y^2 चिह्न '+' से अलग किया गया है, y^2z^2, चिह्नों '+' तथा '−' से अलग किया गया है और z^2x^2 चिह्न '−' द्वारा अलग किया गया है।

बीजीय व्यंजक के '+' अथवा '−' चिह्नों द्वारा अलग किए गए भाग, इसके पद कहलाते हैं।

टिप्पणी : व्यंजक, जिसमें कोई चिह्न न हो, को '+' चिह्न के साथ माना जाता है। उदाहरण के लिए, $2x$ का अर्थ है $+2x$ इत्यादि।

अत: x^2y^2, y^2z^2 और $-z^2x^2$ व्यंजक $x^2y^2 + y^2z^2 - z^2x^2$ के पद हैं और इनकी संख्या 3 है।

इसी प्रकार $3t - 4s$ में पदों की संख्या 2 है और ये पद $3t$ और $-4s$ हैं।

निम्नलिखित उदाहरणों से आपको, बीजीय व्यंजक और इसके पदों को समझने में सहायता मिलेगी:

बीजीय व्यंजक	पदों की संख्या	पद
$-7x$	1	$-7x$
$\frac{2}{f} + q$	2	$\frac{2}{f}, q$
$3x^2y - yz + 6$	3	$3x^2y, -yz, 6$
$4t + \frac{1}{2}ft^2$	2	$4t, \frac{1}{2}ft^2$
$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$	5	$abc, 2fgh, -af^2, -bg^2, -ch^2$

देखें आपने कितना सीखा 5.1

1. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों के सभी पद और पदों की संख्याएँ लिखिए:

   (i) $3t$ (ii) $x^2 + 3xy$ (iii) $t^2 + 3t + \frac{1}{t^2}$

   (iv) $a^3 - b^3 + 3$ (v) $ab + bc - ca$ (vi) $x^2 + y^2 + z^2 + 2hxy$

5.2 दो अथवा अधिक चरों वाले पद के गुणांक

एक चर वाले पद के गुणांक की धारणा को थोड़ा याद कीजिए। इसी धारणा का और विस्तार किया जा सकता है, जबकि पद में एक से अधिक चर हो। इसे निम्नलिखित तरीके से देखा जा सकता है।

पद $15xy$ पर ध्यान दीजिए। इसे $15 \times x \times y$ भी लिख सकते हैं। अतः $15, x, y$ इसके गुणनखंड हैं। 15 को इसका संख्यात्मक गुणनखंड और x, y को इसके चरात्मक गुणनखंड कहते हैं। इनमें से किसी एक को पद के शेष गुणनखंडों के गुणनफल (चिह्न सहित) का गुणांक कहते हैं।

इस प्रकार $15xy$ में x का गुणांक $15y$ है, $15\,xy$ में y का गुणांक $15x$ और $15xy$ में $5x$ का गुणांक $3y$ है। ठीक इसी प्रकार $\frac{3}{7}st$ में t का गुणांक $\frac{3}{7}s$ है और $5x^2y$ में x^2 का गुणांक $5y$ है। यदि आप बीजीय व्यंजक $-3xyz + 5$ को देखें, तो इसके पहले पद $-3xyz$ को $-3 \times x \times y \times z$ लिखा जा सकता है, क्योंकि $-3xyz$ के गुणनखंड $-3, x, y$ तथा z हैं। अब इस व्यंजक का दूसरा पद 5 है और इसमें कोई चरात्मक गुणनखंड नहीं है। इसे अचर पद कहते हैं।

बीजीय व्यंजक का वह पद, जिसमें कोई चरात्मक गुणनखंड नहीं हो, अचर पद कहलाता है।

उदाहरण 5.1 : गुणांक निकालिए:

(a) t में t का

(b) $\frac{2}{3}m^2n^2$ में m का

(c) $-25x^3yz$ में x^2 का

(d) $-25x^3yz$ में yz का

(e) $-25\,x^3yz$ में $5xyz$ का

हल : (a) पद t के गुणनखंड 1 तथा t हैं और इस कारण इसे $1 \times t$ के रूप में लिखा जा सकता है। अतः पद 't' में 't' का गुणांक 1 है।

(b) $\frac{2}{3}m^2n^2$ को $\frac{2}{3} \times m \times m \times n \times n$ के रूप में लिखा जा सकता है।

अतः $\frac{2}{3}m^2n^2$ में m का गुणांक $\frac{2}{3}mn^2$ है।

(c) $-25x^3yz$ को $-25 \times x \times x \times x \times y \times z$ के रूप में लिख सकते हैं।

अतः $-25x^3yz$ में x^2 का गुणांक $-25\,xyz$ है।

(d) उपरोक्त उदाहरण (c) से स्पष्ट है कि $-25x^3yz$ में yz का गुणांक $-25x^3$ है।

(e) $-25x^3yz$ को $-5 \times x \times x \times x \times y \times z \times 5$ के रूप में भी लिख सकते हैं।

अतः $-25\,x^3yz$ में $5\,xyz$ का गुणांक $-5\,x^2$ है।

5.3 बीजीय व्यंजक के सजातीय तथा विजातीय पद

पिछले पाठ में हमने पढ़ा था कि एक ही रूप में चर वाले पदों को सजातीय पद कहते हैं। उदाहरण के लिए 3a, 5a, –7a में एक ही चर 'a' सजातीय रूप से हैं। इन्हें सजातीय पद कहते हैं।

सजातीय पदों की धारणा को दो अथवा अधिक चरों वाले पदों के लिए भी विस्तृत किया जा सकता है।

बीजीय व्यंजक $3x^2y + 2yz^2 - 5x^2y + 7zx^2$ की ओर ध्यान दीजिए।

पद $3x^2y$ को $3 \times x \times x \times y$ भी लिख सकते हैं और $-5x^2y$ को $-5 \times x \times x \times y$ लिख सकते हैं।

यदि आप पदों $3x^2y$ तथा $-5x^2y$ के चरात्मक गुणनखंडों को देखें तो आप पाएंगे कि संख्यात्मक गुणनखंडों को छोड़कर सारे ही चरात्मक गुणनखंड समान हैं (3 तथा –5 क्रमशः पदों $3x^2y$ तथा $-5x^2y$ के संख्यात्मक गुणनखंड हैं)

व्यंजक के वे पद, जिनमें चरात्मक गुणनखंड समान रूप में हों, सजातीय पद कहलाते हैं।

अब पदों $2yz^2$ तथा $7zx^2$ पर ध्यान दें। $2yz^2$ को $2 \times y \times z \times z$ तथा $7zx^2$ को $7 \times z \times x \times x$ के रूप में लिख सकते हैं। आप सरलता से देख सकते हैं कि पदों $2yz^2$ तथा $7zx^2$ के सारे चरात्मक गुणनखंड एक समान नहीं हैं। इन्हें विजातीय पद कहते हैं।

पद जिनमें चरात्मक गुणनखंड एक समान नहीं होते, विजातीय पद कहलाते हैं।

इस प्रकार हम दिखा सकते हैं कि

$x^3y, -x^3y, \frac{1}{3}x^3y$ सजातीय पद हैं तथा

$abc, \frac{1}{7}abc, -35abc$ भी सजातीय पद हैं।

किंतु $3x^2y, 4xy, -x^2y^2$ विजातीय पद हैं, क्योंकि इनमें चरात्मक गुणनखंड अलग-अलग हैं।

उदाहरण 5.2 : निम्नलिखित व्यंजकों के सजातीय तथा विजातीय पदों को निर्धारित कीजिए:

(i) $x + \frac{1}{x} + \frac{1}{7}x - \frac{1}{xy}$ (ii) $a^2y^2 - 2a^2y^2 + y - \frac{7}{y}$

(iii) $5mn - 3m^3n^3 + 5m^2n^2 + \frac{1}{2}mn$

हल: (i) x तथा $\frac{1}{7}x$ सजातीय पद हैं, परंतु $\frac{1}{x}, -\frac{1}{xy}$ विजातीय पद हैं, क्योंकि $-\frac{1}{xy} = -\frac{1}{x} \times \frac{1}{y}$

और इसमें $\frac{1}{y}$ एक ऐसा गुणनखंड है, जो दूसरे पद $\frac{1}{x}$ में नहीं है।

इसी प्रकार x और $\frac{1}{x}$; x तथा $-\frac{1}{xy}$ भी विजातीय पद हैं।

(ii) $a^2y^2, -2a^2y^2$ सजातीय पद हैं, किंतु $y, -\frac{7}{y}$ विजातीय पद हैं। ठीक इसी प्रकार a^2y^2 और y ; a^2y^2 और $-\frac{7}{y}$ भी विजातीय पद हैं।

(iii) $5mn, \frac{1}{2}mn$ सजातीय पद हैं और $5m^3n^3, -3m^3n^3$ भी सजातीय पद हैं, परंतु 5mn $-3m^3n^3$; $5mn, 5m^3n^3$; $-3m^3n^3, \frac{1}{2}mn$; $5m^3n^3, \frac{1}{2}mn$ विजातीय पद हैं, क्योंकि इन युग्मों में चरात्मक गुणनखंड अलग-अलग हैं।

देखें आपने कितना सीखा 5.2

1. (i) a^2y^2z में a^2 का (ii) $\frac{3}{7}s^3t^3$ में st का

   (iii) $-15\,q\,r^2t^2$ में 5t का (iv) $7x^5y^3z^2$ में x^3y^2 का

   गुणांक ज्ञात कीजिए।

2. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों में संख्यात्मक गुणनखंड तथा अचर पद निर्धारित कीजिए:

   (i) $3\frac{y^2}{x^2}+5$ (ii) $\frac{5}{x}-3$ (iii) $2a^2b-\frac{1}{7}$ (iv) $-\frac{3}{7}st^3-\frac{5}{7}$

3. निम्नलिखित पदों में से कौन से सजातीय और कौन से विजातीय हैं?

   (i) 1, t (ii) x, y (iii) $\frac{1}{3}x^2y, -y^2x, 5xy$

   (iv) $\frac{x}{y}, -\frac{7x}{y}, \frac{x}{7y}$ (v) $a^2b^2c^2, -b^2c^2a^2$

4. निम्नलिखित व्यंजकों के सजातीय तथा विजातीय पद निर्धारित कीजिए:

   (i) $x^2-y^2+3x^2-4xy$ (ii) $5x-3y+\frac{3}{5}x+5$

   (iii) $xyz-yxz+zxy+x^2yz$

टिप्पणी

5.4 बीजीय व्यंजकों के विभिन्न प्रकार

बीजीय व्यंजकों $-7x^3yz, 3t+\frac{2}{5}st^2$ तथा $at^2 + 2hst + bs^2$ पर ध्यान दीजिए।

7.1 में आप पहले ही सीख चुके हैं कि किसी व्यंजक में पदों और पदों की संख्या को कैसे निकालते हैं। क्या आप बता सकते हैं कि $-7x^3yz$ में कितने पद हैं? आप सरलता से बता सकते हैं कि $-7x^3yz$ में पदों की संख्या एक है।

बीजीय व्यंजक, जिसमें एक पद हो, एकपद (एकपदी) कहलाता है।

इसलिए $-7x^3yz$ को एक पद कहेंगे। $-8, -3y, a,$ सभी एकपद के उदाहरण हैं।

इसी प्रकार देखें कि व्यंजक $3t+\frac{2}{5}st^3$ में कितने पद हैं। आप कहेंगे दो। यह पद 3t तथा दूसरा $\frac{2}{5}st^3$ हैं।

व्यंजक $3t+\frac{2}{5}st^3$ को द्विपद कहते हैं।

बीजीय व्यंजक, जिसमें दो पद हों, द्विपद कहलाता है।

$3x^2 - 5, p + q, u^2v + 9v^3, a^3 - 9b^3,$ द्विपद के उदाहरण हैं।

तीसरे व्यंजक $at^2 + 2hst + bs^2$ में तीन पद हैं, ये पद $at^2, 2hst, bs^2$ हैं। इसे त्रिपद कहते हैं।

बीजीय व्यंजक, जिसमें तीन पद हों, त्रिपद कहलाता है।

$a^2 + 2ab + b^2, a^3 - b^3 - 2abc, 3p - qr + s, m^2 + m + 2,$ सभी त्रिपदों के उदाहरण हैं।

ध्यान दें कि व्यापक रूप में, दो या दो से अधिक पदों वाले बीजीय व्यंजकों को बहुपद कहते हैं।

$x^3 + y^3, t^3 + 2t^2 + 3t, l^3 - 3l^2 + 5l - 4, a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca,$ सभी बहुपदों के उदाहरण हैं।

टिप्पणी : उपरोक्त सभी उदाहरणों में किसी भी पद में चर, हर में नहीं आता।

उदाहरण 5.3 : लिखिए कि निम्नलिखित में से कौन से एकपद (एकपदी), द्विपद अथवा त्रिपद हैं। तर्क भी दीजिए।

(i) -1 (ii) $3t^2p + 5$ (iii) $x^2 + y^2 - z^2$ (iv) $4x^4y^3 + 3z^5$

हल : (i) '-1' में पदों की संख्या एक है। इसलिए यह एकपद है।

(ii) $3t^2p + 5$ में पदों की संख्या दो है। अतः यह द्विपद है।

(iii) $x^2 + y^2 - z^2$ में पदों की संख्या तीन है। अतः यह त्रिपद है।

(iv) यह द्विपद है, क्योंकि इसमें पदों की संख्या दो है।

5.5 बीजीय व्यंजक की घात

एक पद में चरों के घातांकों का योगफल उस पद की घात कहलाता है।

उदाहरणार्थ:

$4x^2y$ की घात 3 है, क्योंकि x तथा y के घातांकों का योग $2 + 1 = 3$ है।

इसी प्रकार $2x^2$ की घात 2 है। किसी शून्येतर अचर, माना 8 की घात 0 होती है, क्योंकि 8 $= 8 \times 1 = 8 \times x^0$ जहां $x^0 = 1$ है। एक बीजीय व्यंजक में कई पद होते हैं, जो + या – से अलग होते हैं। एक बीजीय व्यंजक की घात उस व्यंजक के विभिन्न पदों में अधिकतम घात तथा शून्येतर गुणांक वाले पद की घात होती है।

उदाहरणार्थ:

बीजीय व्यंजक $3x^2y + 7xy - 5x + 6$ के पदों की घात क्रमशः 3, 2, 1 तथा 0 हैं, जिनमें 3 सबसे अधिक है। अतः इस बीजीय व्यंजक की घात 3 है।

5.6 बीजीय व्यंजक का मान

याद कीजिए कि खंड 4.3 में हमने L लंबाई वाले वर्ग का परिमाप 4L प्राप्त किया था। हमने यह भी देखा था कि यदि वर्ग की भुजा की लंबाई 1 कि.मी. हो, तो परिमाप (4×1) कि.मी. = 4 कि.मी. होगा, यदि यह लंबाई 2 कि.मी. हो, तो परिमाप 8 कि.मी. होगा और यदि भुजा की लंबाई 5 कि.मी. हो, तो परिमाप 20 कि.मी. होगा, इत्यादि। यह सभी वर्ग के परिमापों की बात है, जिसकी एक भुजा की अलग-अलग लंबाइयाँ क्रमशः 1 कि.मी., 2 कि.मी., 5 कि.मी. इत्यादि हैं।

हम यह भी कह सकते हैं कि 4L का मान $L = 1$ कि.मी. के लिए 4 कि.मी. है, $L = 2$ कि.मी. के लिए 4L का मान 8 कि.मी. है और $L = 5$ कि.मी. के लिए 4L का मान 20 कि.मी. है।

किसी बीजीय व्यंजक का मान निकालने के लिए हमें व्यंजक के चरों के संख्यात्मक मान का पता होना चाहिए। व्यंजक का मान प्राप्त करने के लिए हम इसमें चरों की जगह पर उनके संख्यात्मक मान रख देते हैं। यह बात उन व्यंजकों के लिए भी ठीक बैठती है, जिनमें एक से अधिक चर भी होते हैं।

बीजीय व्यंजक $yx^2 - \frac{1}{3}xy^2 + 3$ पर ध्यान दीजिए। मान लीजिए कि आप इस व्यंजक का मान $x = 1, y = -1$ के लिए प्राप्त करना चाहते हैं।

इसके लिए आपको निम्नलिखित प्रकार की क्रिया करनी होगी:

$yx^2 - \frac{1}{3}xy^2 + 3$ में $x = 1, y = -1$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$yx^2 - \frac{1}{3}xy^2 + 3 = (-1)(1)^2 - \frac{1}{3}(1)(-1)^2 + 3$$

$$= -1 - \frac{1}{3} \times 1 \times 1 + 3$$

$$= -1 - \frac{1}{3} + 3$$

$$= \frac{5}{3}$$

चरों के दिए हुए मानों के लिए व्यंजक के मान ज्ञात करने की धारणा को समझने के लिए हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 5.4 : चरों के दिए हुए मानों के लिए, व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $y = 0, z = -1,$ के लिए $5y - z$ का मान

(ii) $x = 2, y = -1, z = -2$ के लिए $-xy + yz + zx$ का मान

हल : (i) व्यंजक $5y - z$ में $y = 0, z = -1$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$5y - z = 5.0 - (-1)$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

(ii) व्यंजक $-xy + yz + zx$ में $x = 2, y = -1, z = -2$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$-xy + yz + zx = -(2)(-1) + (-1)(-2) + (-2)2$$

$$= -(-2) + 2 + (-4)$$

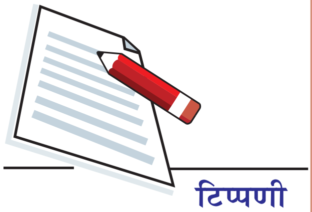
$$= 2 + 2 - 4 = 0$$

देखें आपने कितना सीखा 5.3

1. बताइए कि निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-से एक पद (एकपदी), द्विपद और त्रिपद हैं। प्रत्येक में पदों की संख्या भी लिखिए:

   (i) 0 (ii) $3z + 7$ (iii) $t^2 - 5t + 2$ (iv) $x^3 - 3xy + y^3$

   (v) $p - 3q$



टिप्पणी

2. चरों के दिए हुए मानों के लिए निम्नलिखित व्यंजकों के मानों का परिकलन कीजिए:

(i) $a = 1, b = 2$ के लिए, $\frac{2a}{b}$ का मान

(ii) $(a + b)(a - b)$ का मान, $a = 3, b = 2$ के लिए

(iii) $x = 3, y = -1, z = -3$ के लिए, $xyz + yzx + zxy$ का मान

(iv) $x = -1, y = -1, z = 2$ के लिए, $2x^3y - 3xy^2 + z$ का मान

(v) $a = b = c = d = 2$ के लिए, $a^2 + b^2 + c^2 - 3d^2$ का मान

5.7 बीजीय व्यंजकों का संकलन

आइए अब हम देखें कि बीजीय व्यंजकों को इकट्ठा करने पर क्या होता है। उदाहरण के लिए क्या हम $7x + 2y$ और $3x$ का योग कर सकते हैं? आप ऐसा कैसे कर सकते हैं। इसे समझने के लिए आप पहले व्यंजक को 7 संतरे और 2 केलों के बराबर मान लो, जिसमें हम 3 संतरे जोड़ रहे हैं। हमें क्या प्राप्त होता है? हमें $(7 + 3)$ संतरे तथा 2 केले प्राप्त होते हैं। अत: हमने एक जैसी वस्तुओं को इकट्ठा किया।

दूसरे शब्दों में, हम सजातीय पदों को इकट्ठा करते हैं-

$7x + 2y + 3x$

$= (7x + 3x) + 2y$ (सजातीय पदों का एक समूह बनाते हुए)

$= (7 + 3)x + 2y$ (सजातीय पदों के गुणांकों का योग)

$= 10x + 2y$

यह विधि समूह बनाने की विधि कहलाती है।

व्यंजकों के संकलन करने की एक आसान विधि सजातीय पदों को एक-दूसरे के नीचे लिखने की है। उदाहरण के लिए $4a + 3b - 12c$ और $2a - 5c$ का योग करने के लिए, हम इस प्रकार लिखते हैं:

$$\begin{array}{rrrr} & 4a & +\,3b & -\,12c \\ & +2a & & -\,5c \\ \hline \text{योग} & = 6a & +\,3b & -\,17c \end{array}$$

यह विधि संकलन की स्तंभ विधि कहलाती है। आइए, हम एक और उदाहरण लें। माना हमें $7 - 14x$ और $5x - a - 3$ का योग करना है।

$(7 - 14x) + (5x - a - 3)$

$= (7 - 3) + (-14x + 5x) - a$ (सजातीय पदों के उचित चिह्न के साथ समूह बनाकर)

$= 4 + (5 - 14)x - a$ (बंटन नियम)

$= 4 - 9x - a$

हम इस प्रश्न को निम्नलिखित विधि से भी कर सकते हैं:

$$\begin{array}{r} 7 - 14x \\ +(-3) + 5x - a \\ \hline 4 - 9x - a \end{array}$$

अत: प्रत्येक विधि में व्यंजक के सरल रूप, जिसमें पदों की संख्या न्यूनतम है, निम्न है:

$$4 - 9x - a$$

आइए अब हम यह देखें कि तीन बीजीय व्यंजकों का संकलन करते समय क्या होता है। यह क्रिया उसी तरह है, जिस तरह हम तीन संख्याओं का संकलन करते हैं। हम पहले किन्हीं दो का योग करते हैं तथा इस योगफल में तीसरे को जोड़ देते हैं। उदाहरण के लिए, आइए सरल करें:

$$(4a + 3b - 12c) + (b + 2c) + (6a - c)$$

इसे हम दो विधियों से कर सकते हैं–या तो एक समय में दो लाकर या सभी सजातीय पदों को एकत्र करके।

$(4a + 3b - 12c) + [(b + 2c) + (6a - c)]$

$= (4a + 3b - 12c) + (6a + b + c)$

$= 10a + 4b - 11c$

या $(4a + 3b - 12c) + (b + 2c) + (6a - c)$

$= (4a + 6a) + (3b + b) + (-12c + 2c - c)$

$= 10a + 4b - 11c$

आप इसे सजातीय पदों को स्तंभ रूप में लिखकर स्तंभ विधि द्वारा भी सरल कर सकते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 5.4

निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए। परिणाम वाले व्यंजक में पदों की संख्या भी लिखिए:

(i) $2 [x + 5(x + 2)] - 6$

(ii) $(2x^3 + 7x^2y^2 + 9xy^3) + (6 + x^2y^2 - 3xy^3)$

(iii) $2[4x + 3 \{2 + (x + 1)\} + x]$

5.8 बीजीय व्यंजकों का व्यवकलन

आइए अब हम एक बीजगणितीय व्यंजक में से दूसरे व्यंजक को घटाने की संक्रिया पर विचार करें। क्या आप ऐसा सोचते हैं कि यह संकलन संक्रिया की भांति ही है? आपका संख्याओं का ज्ञान आपको ऐसा कहने के लिए प्रेरित करता है। उदाहरण के लिए, यदि आपको $7x + 2y$ में से $3x$ को घटाना हो, तो आपको क्या प्राप्त होगा?

आप एक बार फिर सजातीय पदों को एक समूह में इकट्ठा करेंगे। अत:

$$\begin{aligned}(7x + 2y) - 3x &= (7x - 3x) + 2y \\ &= (7 - 3)x + 2y \\ &= 4x + 2y\end{aligned}$$

इसी प्रकार आप $(4a + 3b - 12c) - (2a - 5c)$ को किस प्रकार सरल करेंगे?

$4a + 3b - 12c$ में $(2a - 5c)$ के ऋणात्मक व्यंजक, अर्थात् $-2a + 5c$ को जोड़ने से हम ऐसा कर सकते हैं। अत: स्तंभ विधि द्वारा

$$\begin{array}{rrr} & 4a + 3b & - 12c \\ +(-2)a & & + 5c \\ \hline & 2a + 3b & - 7c \end{array}$$

याद कीजिए कि किसी व्यंजक का ऋणात्मक व्यंजक उसके सभी पदों के चिह्न बदलने पर प्राप्त होता है। $(2a - 5c) - (4a + 3b - 12c)$ क्या होगा?

आप इसे ऊपर दी गई उदाहरण की विधि द्वारा सरल कर सकते हैं। इसे स्वयं कीजिए। आपको $-2a - 3b + 7c$ प्राप्त होगा, जो कि एक त्रिपद व्यंजक है, जो $2a + 3b - 7c$ का ऋणात्मक व्यंजक है।

अब हम उस 'जादू के खेल' की समस्या को देखें, जो आपने पाठ के आरंभ में ली थी। क्या आप जान गए हैं कि यह कैसे हुआ? माना कि आरंभ में आपने संख्या x ली तथा दूसरी जोड़े जाने वाली संख्या y ली। तब प्रश्न द्वारा

संख्या सोचो	x
2 से गुणा करो	$2x$
दूसरी संख्या के दुगुने को जोड़ो	$2x + 2y$
4 घटाओ	$2x + 2y - 4$
2 से भाग दो	$\dfrac{2x + 2y - 4}{2}$
	$= \left(\dfrac{2}{2}\right)x + \left(\dfrac{2}{2}\right)y - \dfrac{4}{2}$
	$= x + y - 2$

दूसरी सोची हुई संख्या को घटाओ $= (x + y - 2) - y = x - 2$

2 जोड़ो $= x - 2 + 2$

संख्या है $= x$

जो कि वही संख्या है, जो आरंभ में ली थी।

देखें आपने कितना सीखा 5.5

1. निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए। इनमें से कौन-कौन से द्विपद व्यंजक हैं?

   (i) $3a + [3(a - b) - c]$

   (ii) $2(b - c) - (bc + 3ab)$

   (iii) $10 - 4[3x - (1 - x)]$

2. एक संख्या सोचिए। इसका तीन गुना कीजिए। इसमें ऐसी संख्या जोड़ो, जो मूल संख्या 1 से अधिक है। इसमें 7 जोड़ो। इसे 4 से भाग दो और फिर 2 घटाओ। ज्ञात कीजिए कि क्या यह वही संख्या है, जो आपने आरंभ में सोची थी।

अब तक आपने बीजगणितीय व्यंजकों को देखा है तथा आप दो बीजीय व्यंजकों का योग या घटा करने पर इनको कैसे सरल करते हैं। अब हम एक और मौलिक संक्रिया के बारे में पढ़ेंगे, जिसे गुणा कहा जाता है।

5.9 बीजीय व्यंजकों की गुणा

आरंभ करते हुए आप याद कीजिए कि 20 (19+11) का मान आप कैसे ज्ञात करेंगे। इसे आप या तो 20(19+11) = 20(19)+20(11) = 380 + 220 = 600 लिखेंगे या आप पहले 19+11 = 30 ज्ञात करेंगे तथा फिर 20(19+11) = 20(30) = 600 ज्ञात करेंगे।

दूसरी विधि को हम केवल उस अवस्था में ही कर सकते हैं, जिसमें कोष्ठकों के भीतर की संख्याओं को हम इकट्ठा कर सकते हैं, परंतु यह अधिकतर अवस्थाओं में संभव नहीं होता। इन अवस्थाओं में हम कोष्ठक के प्रत्येक पद में गुणा की संक्रिया लगाते हैं (बंटन गुणधर्म)। इसे समझने के लिए आइए, निम्न उदाहरणों पर विचार करें:

उदाहरण 5.5 : $(S + 2)$ को 5 से गुणा कीजिए।

हल: $5(S + 2) = 5S + 5(2)$

$= 5S + 10$

हम इसे इस प्रकार भी कर सकते हैं:

$(S + 2)5 = (S)5 + 2(5) = 5S + 10$

टिप्पणी : $(S)5$ को $5S$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, $S5$ द्वारा नहीं।

उदाहरण 5.6 : $2x$ और $x^2 - 2x + 1$ का गुणा कीजिए।

हल: $2x\,(x^2 - 2x + 1) = 2x\,(x^2) - 2x\,(2x) + 2x\,(1)$

$$= 2x^3 - 4x^2 + 2x$$

उदाहरण 5.7 : $2x + 5$ और $2x + 3$ को गुणा कीजिए।

हल : $(2x + 5)\,(2x + 3)$

$$= 2x\,(2x + 3) + 5(2x + 3)$$

$$= 2x(2x) + 2x(3) + 5(2x) + 5(3)$$

$$= 4x^2 + 6x + 10x + 15$$

$$= 4x^2 + 16\,x + 15$$

देखें आपने कितना सीखा 5.6

1. निम्नलिखित में गुणा कीजिए और गुणनफल को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $y\,(3y^2 + 5y - 6)$

   (ii) $(a^2 - b^2)\,ab$

आइए दोहराएं

- बीजीय व्यंजक, चार मूलभूत संक्रियाओं के चिह्नों द्वारा जोड़े गए अचरों और चरों का संयोजन होता है।
- चिह्नों + अथवा – से अलग किए गए भागों को बीजीय व्यंजक के पद कहते हैं।
- जिस व्यंजक में कोई चिह्न न हो तो उसे + चिह्न के साथ माना जाता है। उदाहरण के लिए $3t$ का अर्थ $+ 3 \times t$ है।
- पद $-5\,pqr$ में $-5, p, q, r$, सभी $-5\,pqr$ के गुणनखंड हैं। इनमें से किसी को पद में दूसरे गुणनखंडों के गुणनफल (चिह्न सहित) का गुणांक कहते हैं।
- बीजीय व्यंजक में जिस पद में कोई चरात्मक गुणनखंड न हो, उस पद को अचर कहते हैं। उदाहरण के लिए व्यंजक $x^2 + xy + 5$ में 5 एक अचर पद है।
- एक पद वाले बीजीय व्यंजक को एकपद (एकपदी) कहते हैं।
- दो पदों वाले बीजीय व्यंजक को द्विपद कहते हैं।
- तीन पदों वाले बीजीय व्यंजक को त्रिपद कहते हैं।

टिप्पणी

- किसी व्यंजक का मान ज्ञात करने के लिए चरों के संख्यात्मक मानों का ज्ञान होना आवश्यक है। व्यंजक का मान प्राप्त करने के लिए, इसमें चरों के संख्यात्मक मान रख देते हैं और सरल करते हैं।
- दो बीजीय व्यंजकों का संकलन या व्यवकलन करने के लिए सजातीय पदों का संकलन या व्यवकलन किया जाता है।
- बीजीय व्यंजकों को गुणा करने के लिए बंटन गुण-धर्म का प्रयोग किया जाता है।

आइए अभ्यास करें

1. बताइए कि निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन से एकपद (एकपदी), द्विपद और त्रिपद हैं:

   (i) $ut + \frac{1}{2}gt^2$ (ii) 0 (iii) $x^2 + y^2 - a^2$

   (iii) $ax^2 + 2hxy + by^2$ (v) $p^2 + 2pq + q^2$ (vi) $v^2 - u^2$

2. चरों के दिए हुए मानों के लिए निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $x^2 + y^2 - 169$ का मान, $x = 5, y = 12$ के लिए

   (ii) $(s + t)(s - t)$ का मान, $s = 5, t = 3$ के लिए

3. $yz^2 - (7x - 2y) - 10yz^2$
4. $7 - 2[4x - (1 - 3x)]$
5. $-2(3x - z) - (z - y) + 5(x + 2y)$
6. $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 5.1

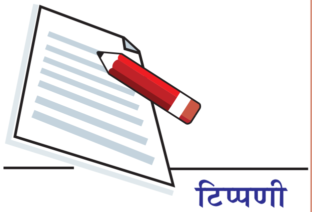
1. (i) 3t ; 1 (ii) x^2, 3xy ; 2 (iii) t^2, 3t, $\frac{1}{t^2}$; 3

   (iv) a^3, $-b^3$, 3 ; 3 (v) ab, bc, –ca ; 3 (vi) x^2, y^2, z^2, 2hxy; 4

देखें आपने कितना सीखा 5.2

1. (i) y^2z (ii) $\frac{3}{7}s^2t^2$ (iii) $-3qr^2t$ (iv) $7x^2yz^2$

2. (i) 3 ; 5 (ii) 5 ; –3 (iii) 2 ; $-\frac{1}{7}$ (iv) $-\frac{3}{7}$; $-\frac{5}{7}$



टिप्पणी

3. (i) विजातीय (ii) विजातीय (iii) विजातीय (iv) सजातीय (v) सजातीय

4. (i) $x^2, 3x^2$ सजातीय पद हैं

$x^2, -y^2$; $x^2, -4xy$; $-y^2, 3x^2$; $-y^2, -4xy$; $3x^2, -4xy$ विजातीय पद हैं।

(ii) $5x, \frac{3}{5}x$ सजातीय पद हैं

$\frac{3}{5}x, 5$; $5x, -3y$; $5x, 5$; $-3y, \frac{3}{5}x$; $-3y, 5$ विजातीय पद हैं।

(iii) $xyz, -yzx, zyx$ सजातीय पद हैं।

xyz, x^2yz ; $-yxz, x^2yz$; zxy, x^2yz विजातीय पद हैं।

देखें आपने कितना सीखा 5.3

1. (i) एकपद, 1 (ii) द्विपद, 2 (iii) त्रिपद, 3 (iv) द्विपद, 2 (v) द्विपद, 2
2. (i) 1 (ii) 5 (iii) 27 (iv) 7 (v) 0

देखें आपने कितना सीखा 5.4

1. (i) $12x + 14$, द्विपद, पदों की संख्या 2 है।

(ii) $8x^2y^2 + 6xy^3 + 2x^3 + 6$, पदों की संख्या 4 है।

(iii) $16x + 18$, पदों की संख्या 2 है, द्विपद

देखें आपने कितना सीखा 5.5

1. (i) $6a - 3b - c$

(ii) $-bc - 3ab + 2b - 2c$

(iii) $14 - 16x$, एक द्विपद

2. हां

हल :	संख्या सोचो	n
	तीन गुना करो	$3n$
	इसमें ऐसी संख्या जोड़ो	
	जो मूल संख्या से 1 अधिक है	$3n + (n + 1) = 4n + 1$
	7 जोड़ो	$4n + 1 + 7 = 4n + 8$
	4 से भाग दो	$\frac{4n+8}{4} = n+2$
	2 घटाओ	$n + 2 - 2 = n$

देखें आपने कितना सीखा 5.6

1. (i) $3y^3 + 5y^2 - 6y$

   (ii) $a^3b - ab^3$

आइए अभ्यास करें

1. (i) द्विपद (ii) एकपद (iii) त्रिपद (iv) त्रिपद

   (v) त्रिपद (vi) द्विपद

2. (i) 0 (ii) 16

3. $-9yz^2 - 7x + 2y$

4. $9 - 14x$

5. $-x + 11y + z$

6. $x^4 - 5x^2 + 4$

6

एक चर में रैखिक समीकरण

आपने इस पाठ्यक्रम में कई स्थानों पर पढ़ा है कि गणित हमारे अपने आसपास की दुनिया को समझने में सहायता करता है। यह कैसे होता है? मान लो आपकी कोई समस्या है। पहले हम इसको गणित की भाषा में लिखने का प्रयत्न करते हैं। यह कार्य सदैव आसान नहीं होता। परंतु कुछ समस्याओं में हम ऐसा कर सकते हैं। उदाहरण के लिए आपकी समस्या है कि आपको अपने घर पर 10 लोगों को भोजन पर आमंत्रित करना है। इनमें से 6 लोगों में प्रत्येक को 4 रोटी और शेष में से प्रत्येक को 2 रोटी की आवश्यकता है। आप जानना चाहते हैं कि आपको कितनी रोटी बनानी हैं। यदि अभीष्ट रोटियों की संख्या p हो तो

$$p = 6 \times 4 + 4 \times 2$$

यदि आपको यह पता न हो कि उनमें से कितनों को 4 रोटी चाहिए तो आप यह संख्या x(माना) ले सकते हैं। तब अभीष्ट रोटियों की संख्या

$$p = 4x + 2\,(10 - x)$$

यदि आपके पास कुल 28 रोटियां होतीं तो यह समस्या गणित में इस प्रकार लिखी जाती

$$28 = 4x + 2\,(10 - x)$$

वास्तव में गणित हमारी सारी समस्याओं को हल करने में सहायता करता है। इस पाठ में हम उन समस्याओं को लेंगे, जिन्हें एक विशेष संक्रिया में बदला जा सके। यह संक्रिया एक चर में रैखिक समीकरण जानी जाती है।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- एक शाब्दिक समस्या को बीजगणितीय समीकरण में बदलना।
- समीकरण $ax + b = 0$ एक चर में रैखिक समीकरण है
- रैखिक समीकरण के हल को समझना

- एक चर में रैखिक समीकरण को हल करना
  - (i) समीकरण के दोनों ओर एक व्यंजक को जोड़ने से
  - (ii) समीकरण के दोनों ओर एक व्यंजक घटाने से
  - (iii) समीकरण के दोनों ओर एक शून्येतर राशि द्वारा गुणा और भाग से
- दैनिक जीवन में सरल शब्दों वाले प्रश्नों को रैखिक समीकरण द्वारा हल करना

6.1 समीकरण की अवधारणा

आपने बीजगणितीय व्यंजकों जैसे कि $x + 10$, $y - 2$, $10x + 2y$, $6a + 3b - 17c$, xyz, x^3y आदि के बारे में पढ़ा है। यदि हम एक बीजगणितीय व्यंजक को दूसरे व्यंजक के बराबर रख दें तो हमें एक समीकरण प्राप्त होता है। $y - 2 = 0$ एक समीकरण है। अन्य उदाहरण प्राप्त करने के लिए आइए हम निम्नलिखित कथनों को गणितीय कथनों में बदलें:

(i) एक संख्या का तीन गुणा वही परिणाम देता है, जो संख्या में 2 जोड़ने से होता है।

(ii) दो क्रमागत संख्याओं का योग 37 है।

(iii) एक आयताकार बाग की चौड़ाई इसकी लंबाई का आधा है तथा बाग का परिमाप 600 मीटर है।

इन कथनों को आप बीजगणित में किस प्रकार लिखेंगे?

(i) में, यदि y वह संख्या है, जिसे हम नहीं जानते तो इस कथन को हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$3y = y + 2 \qquad ...(1)$$

जो कि एक समीकरण है।

(ii) में हम एक संख्या को a ले लेते हैं, तब दूसरी संख्या $a + 1$ या $a - 1$ है।

अत: कथन बन जाता है: $a + (a + 1) = 37$ या $a + (a - 1) = 37$ ...(2)

पुन: यह एक समीकरण है।

क्या अब आप (iii) को लिख सकते हैं?

माना चौड़ाई w मीटर है, तब लंबाई $2w$ मीटर होगी।

आप जानते हैं कि परिमाप चारों भुजाओं का योग होता है।

अत: कथन से,

$$w + 2w + w + 2w = 600 \qquad ...(3)$$

यह समीकरण का एक और उदाहरण है।

देखें आपने कितना सीखा 6.1

1. समीकरण के 3 उदाहरण दीजिए।

6.2 रैखिक समीकरण

अब आपके पास एक समीकरण के बारे में कुछ ज्ञान है। एक विशेष प्रकार के समीकरण पर विचार कीजिए। आप अपने पिछले पाठों से यह जानते हैं कि यह समीकरण वही हैं, जो नीचे दिए गए हैं

$$\frac{2}{3}y = y + 2 \qquad \ldots(1)$$

$$2a + 1 = 37 \qquad \ldots(2)$$

$$6w = 600 \qquad \ldots(3)$$

क्या इन तीनों समीकरणों में आप कुछ एक जैसा पाते हैं? उदाहरण के लिए, प्रत्येक में कितने चर हैं? आप पाएंगे कि प्रत्येक समीकरण में 1 चर है। पहले में y, दूसरे में a और तीसरे समीकरण में w चर राशि हैं।

इनके घात क्या हैं?

आप जांच कर सकते हैं कि प्रत्येक की घात 1 है। तीनों समीकरण, जिन पर हमने विचार किया है, एक चर में रैखिक समीकरण कहलाते हैं। यह समीकरण रैखिक कहलाते हैं, क्योंकि यदि हम इन्हें ज्यामिति द्वारा एक तल में निरूपित करें तो हमें प्रत्येक अवस्था में सरल रेखा प्राप्त होती है।

परिभाषा : एक चर में रैखिक समीकरण ऐसा समीकरण होता है, जिसमें एक चर हो तथा जिसकी घात 1 हो।

अब हम अपने दैनिक जीवन की विभिन्न परिस्थितियां देखें, जहां हमें रैखिक समीकरण को हल करने की आवश्यकता पड़ती है। हम इनको हल करने की विधि अगले खंड में पढ़ेंगे।

उदाहरण 6.1 निम्नलिखित कथनों को रैखिक समीकरण द्वारा प्रस्तुत कीजिए।

(a) एक पत्रिका और समाचार पत्र का मूल्य ₹ 15 है। पत्रिका का मूल्य समाचार पत्र के मूल्य का 4 गुना है।

(b) आप अपने घर से 10 बजे साइकिल पर 10 कि.मी. प्रति घंटा की गति से चले। दोपहर 11 बजे आपकी बहन वहीं से उसी मार्ग से आपके पीछे 20 कि.मी. प्रति घंटा की गति से चली। वह किस समय आपसे आगे निकल जाएगी?

गणितीय रचनाएं

(a) माना कि समाचार पत्र का मूल्य n रुपये है, क्योंकि पत्रिका का मूल्य समाचार पत्र के मूल्य का 4 गुना है

$\therefore$ पत्रिका का मूल्य = ₹ 4n

हम जानते हैं कि कुल मूल्य = ₹ 15

$\therefore$ $n + 4n = 15$

या $5n = 15$ ...(4)

यह रैखिक समीकरण दी गई समस्या को प्रस्तुत करता है।

टिप्पणी : आप पत्रिका का मूल्य m रुपये मानकर भी समस्या को गणित की समस्या में बदल सकते थे।

(b) माना कि आपकी बहन द्वारा आपको x घंटों के बाद पार किया गया हो। अतः x घंटों में आपने 10x कि.मी. दूरी चल ली होगी, क्योंकि आपकी बहन आपसे 1 घंटे बाद चली तो उसने $(x - 1)$ घंटे का समय आपके पास से गुजरने में लिया है।

उसने $20\ (x - 1)$ कि.मी. दूरी चली होगी

आप दोनों एक बिंदु पर मिलते हैं

$\therefore$ $10x = 20\ (x - 1)$ ...(5)

यह रैखिक समीकरण दी गई समस्या को प्रस्तुत करता है।

देखें आपने कितना सीखा 6.2

1. निम्नलिखित कथनों को रैखिक समीकरणों द्वारा प्रस्तुत कीजिए:

   (i) एक संख्या को 4 से गुणा करने पर वही परिणाम प्राप्त होता है, जो संख्या में 6 जोड़ने पर।

   (ii) एक दर्जी की दुकान में अस्थायी आधार पर जांच हेतु तीन नए दर्जी अकरम, बानो और चारू शामिल हुए। चारू ने एक सप्ताह में अकरम से 10 अधिक ब्लाऊजों की सिलाई की तथा उसी समय में बानो ने अकरम से तीन गुना अधिक ब्लाऊजों की सिलाई की। सप्ताह में तीनों द्वारा कुल 50 ब्लाऊज तैयार किए गए।

   (iii) एक विशेष मिश्रण में रेत और सीमेंट का अनुपात 4 : 1 है। इसी अनुपात को ध्यान में रखते हुए 25 कि.ग्रा. मिश्रण तैयार करना है।

   (iv) दो गाड़ियां एक ही समय में 426 कि.मी. की दूरी पर स्थित दो स्टेशनों से एक-दूसरे की ओर चलती हैं। यदि इनकी गतियों में 8 कि.मी. प्रति घंटा का अंतर हो और यह 3 घंटे बाद आपस में मिलें।

6.3 रैखिक समीकरणों को हल करना

अब तक आप जान गए हैं कि रैखिक समीकरण क्या होता है। आपने दैनिक जीवन से कुछ वास्तविक समस्याओं पर भी विचार किया है, जिन्हें हम रैखिक समीकरणों द्वारा प्रस्तुत कर सकते हैं। अत: यदि हमें समस्याओं को हल करना है तो हमें संगत समीकरणों को हल करने के योग्य होना चाहिए। केवल उस अवस्था में ही गणितीय रचना से कुछ सहायता मिल सकेगी। अब हम देखते हैं कि ऐसा कैसे किया जाए? पहले हम 'समीकरण को हल करने' का अर्थ समझने का प्रयत्न करते हैं। हम एक उदाहरण से आरंभ करते हैं। समीकरण $x + 1 = 2$ पर विचार कीजिए। शब्दों में यह कथन है, "1 में क्या जोड़ने से 2 प्राप्त होता है?"

अत: यदि हम x को 1 मान लें तो समीकरण $x + 1 = 2$ एक सत्य कथन बन जाता है। क्या x का कोई दूसरा मान है, जिससे कथन सत्य हो सकता है। एक दूसरा मान (माना 3) लेकर जांच कीजिए। आपको एक गलत कथन $3 + 1 = 2$ प्राप्त होगा। अत: x का केवल एक मान अर्थात् $x = 1$ समीकरण के दोनों पक्षों को बराबर करता है।

हम कहते हैं कि $x = 1$ समीकरण को संतुष्ट करता है या समीकरण को सत्य कथन बनाता है।

x का यह मान समीकरण का हल कहलाता है।

अत: एक समीकरण को हल करने का अर्थ है कि उस चर के वह सभी मान ज्ञात करना, जिनसे समीकरण एक सत्य कथन बन जाए। यह मान समीकरण के हल कहलाते हैं।

परिभाषा : चर का वह मान जिससे समीकरण एक सत्य कथन बन जाता है, समीकरण का हल कहलाता है।

यह भी देखिए कि एक चर में प्रत्येक रैखिक समीकरण का एक और केवल एक हल होता है।

आइए देखिए कि यह अद्वितीय हल कैसे ज्ञात किया जाता है।

माना हम समीकरण $x + 5 = 27$ पर विचार करते हैं। अब हम x का मान ज्ञात करना चाहते हैं। अत: हम बायें पक्ष में +5 से छुटकारा पाना चाहते हैं, जिससे इस ओर केवल x ही रह जाए। हम ऐसा किस प्रकार करते हैं? जैसा हम संख्याओं में करते हैं, हम समीकरण के दोनों पक्षों से 5 घटा देते हैं।

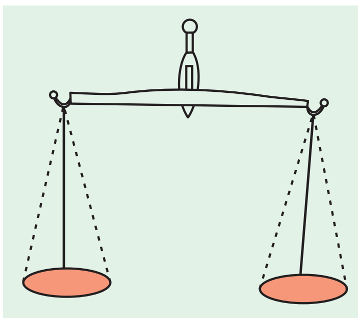
ऐसा करने से हमें प्राप्त होता है :

$$x + 5 - 5 = 27 - 5$$

या $$x = 22$$

यह दिए गए समीकरण का हल है।

याद रखिए कि समीकरण एक तराजू की तरह है।



चित्र 9.1

जो भी संक्रिया हम एक ओर करते हें, वह हमें दूसरी ओर भी अवश्य करनी होगी, जिससे समीकरण बना रहे। अब हम खंड 6.1 के समीकरण 1 पर विचार करते हैं।

यह समीकरण है : $3y = y + 2$

आप इस समीकरण को किस प्रकार हल करेंगे?

आप समीकरण के दोनों पक्षों में y को देखते हैं। अतः क्या आप दोनों को समीकरण के एक पक्ष में ला सकते हैं? कैसे?

माना आप दोनों ओर से y घटा देते हैं।

आप पाते हैं कि $3y - y = y + 2 - y$

अतः समीकरण बन जाती है

$$3y - y = 2$$

या $\quad 2y = 2$

या $\quad \dfrac{2y}{2} = \dfrac{2}{2}$

$\therefore \quad y = 1$

समीकरण $3y = y + 2$ में $y = 1$ लिखने पर

$$3 \times 1 = 1 + 2$$

$$3 = 3$$

जो कि सत्य कथन है।

$\therefore \quad y = 1$ अभीष्ट हल है।

आप देखते हैं कि हल प्राप्त करते समय हम प्रत्येक चरण में समीकरण बदलते हैं, परंतु हम समानता में कोई अंतर नहीं आने देते। हम निम्नलिखित चरणों को एक या अधिक बार अपनाते हैं :

चरण 1 : समीकरण के दोनों ओर एक ही व्यंजक को जोड़ना या घटाना

चरण 2 : समीकरण के दोनों ओर शून्येतर संख्या से गुणा या भाग करना

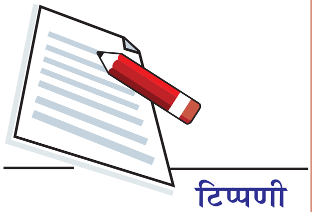
आइए देखिए समीकरण 4 अर्थात् $5n = 15$ को हल करने के लिए हम ऊपर के चरणों का किस प्रकार प्रयोग करते हैं।

चरण 2 द्वारा, 5 से दोनों ओर भाग करते हुए,

$$\frac{5n}{5} = \frac{15}{5} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad n = 3$$

जो कि अभीष्ट हल है। (जांच कीजिए)

आइए इस हल को खंड 6.2 के वास्तविक जीवन की परिस्थिति से उत्पन्न समीकरण (4) में रखिए। हम देखते हैं कि समाचार पत्र का मूल्य 3 रुपये और पत्रिका का मूल्य 12 रुपये आता है।



टिप्पणी

अब हम खंड 6.2 के समीकरण (5) को देखिए

समीकरण है $\quad 10x = 20(x - 1)$

या $\quad 10x = 20x - 20$

या $\quad 20 = 20x - 10x$

या $\quad 20 = 10x$

या $\quad \dfrac{20}{10} = x$

अर्थात् $\quad x = 2$

अत: समीकरण का हल $x = 2$ है।

आप इसकी जांच कर सकते हैं कि खंड 6.2 के समीकरण 5 का हल $x = 2$ है।

आइए अब हम खंड 6.2 के उदाहरण 1(b) पर जाएं, जिससे हमें यह समीकरण प्राप्त हुआ था। हमने कहा था, दोनों x घंटों के बाद एक-दूसरे से मिलेंगे। अत: आपकी बहन आपके चलने के 2 घंटे बाद आपको पार कर लेगी। आपने 10 बजे प्रात: यात्रा आरंभ की थी। आप किस समय अपनी बहन से पीछे हो जाएंगे। दोपहर 12 बजे। आप दोनों अवश्य ही इतनी साइकिल चलाकर थक गए होंगे।

देखें आपने कितना सीखा 6.3

1. उन प्रश्नों को हल कीजिए, जिनको देखें आपने कितना सीखा 6.2 में दिया गया है। अपने हलों की जांच कीजिए।

आइए दोहराएं

- एक समीकरण दो बीजगणितीय व्यंजकों के बीच समानता का संबंध है।
- एक चर में रैखिक समीकरण वह समीकरण होता है, जिसमें एक चर तथा जिसकी घात 1 होती है।
- चर का वह मान, जो समीकरण को सत्य कथन बनाता है, समीकरण का हल कहलाता है।
- एक चर में एक रैखिक समीकरण का एक और केवल एक (अद्वितीय) हल होता है।

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को हल कीजिए और अपने हल की जांच कीजिए :

   (a) $8 = 2 - 3x$

   (b) $7y - 9 = 6y - 10$

   (c) $[x - (x + 5) - (x - 5)] = 3x + 7$

2. निम्नलिखित शाब्दिक प्रश्नों को रैखिक समीकरणों में बदलिए और उनको हल कीजिए :

   (a) यदि एक संख्या में से 5 घटा दिया जाए तो परिणाम मूल संख्या के दोगुने के बराबर आता है। संख्या क्या है?

   (b) एक आयत की लंबाई इसकी चौड़ाई की तीन गुनी है। यदि इसका परिमाप 64 मीटर हो तो इसका क्षेत्रफल (अर्थात् लंबाई x चौड़ाई) ज्ञात कीजिए।

   (c) एक वस्तु, जिसका पृथ्वी पर भार 48 कि.ग्रा. है, का चंद्रमा पर भार 8 कि.ग्रा. है। यदि एक व्यक्ति का पृथ्वी पर भार 54 कि.ग्रा. है तो चंद्रमा पर उसका भार ज्ञात कीजिए।

   (d) एक त्रिभुज का दूसरा कोण पहले कोण से 20° अधिक तथा तीसरा कोण दूसरे कोण के दुगुने के बराबर है। त्रिभुज के तीनों कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 6.1

(1) अनंत उदाहरण हो सकते हैं। कुछ निम्नलिखित हैं :

$x = y,\ x = 2y,\ 3xy = x^2y + 9$

(2) अनंत उदाहरण हो सकते हैं। कुछ निम्नलिखित हैं :

(i) $3x^2 - 5x = 2x + 7$ (घात 2)

(ii) $y - 3y^3 + 2y^2 = 4y^2 + 5$ (घात 3)

(iii) $3x - 4 = -2x + 5$ (घात 1)

देखें आपने कितना सीखा 6.2

1. (i) यदि n संख्या है तो

   $4n = 6 + n$

   (ii) माना अकरम ने x ब्लाऊज तैयार किए, तब बानो ने 3x और चारू ने x + 10 ब्लाऊज तैयार किए

   $\therefore$ समीकरण है

   $x + 3x + (x + 10) = 50$

   (iii) माना सीमेंट और रेत की मात्रा क्रमशः x एवं 4x है

   तब $x + 4x = 25$

   अथवा $5x = 25$

   (iv) यदि धीमी गाड़ी की गति x कि.मी. प्रति घंटा हो तो दूसरी गाड़ी की गति (x + 8) कि.मी. प्रति घंटा होगी।

   $\therefore\ 3x + 3(x + 8) = 426$

देखें आपने कितना सीखा 6.3

1. (i) $n = 2$

   (ii) $x = 8$, अत: अकरम ने 8, वानों ने 24 और चारू ने 18 ब्लाऊज तैयार किये।

   (iii) $C = \dfrac{25}{4}$

   $\therefore$ अभीष्ट मात्रा = $6\dfrac{1}{4}$ किग्रा

   (iv) $x = 57$

   $\therefore$ गाड़ियों की गतियां 57 कि.मी. प्रति घंटा और 65 कि.मी. प्रति घंटा हैं।

आइए अभ्यास करें

1. (a) $x = -2$ (b) $y = -1$ (c) $x = -\dfrac{7}{4}$

2. (a) गणितीय कथन $x - 5 = 2x$, जबकि x संख्या है।

   हल $x = -5$

   (b) माना चौड़ाई x मीटर, लम्बाई 3x मीटर

   $$\therefore \quad 2(x + 3x) = 64$$
   $$8x = 64$$
   या $$x = 8$$

   $\therefore$ आयत की लंबाई = 24 मीटर

   और आयत की चौड़ाई = 8 मीटर

   $\therefore$ आयत का क्षेत्रफल = 192 वर्ग मीटर

   (c) समीकरण है : $\dfrac{w}{54} = \dfrac{8}{48}$, जबकि w अभीष्ट भार है

   $\therefore$ $w = 9$

   चंद्रमा पर व्यक्ति का भार = 9 कि.ग्रा. होगा।

   (d) समीकरण है :

   $x + (x + 20) + 2(x + 20) = 180$

   जबकि x° पहले कोण का माप है।

   $\therefore$ $x = 30$

   तीनों कोणों के माप हैं :

   30°, 50° और 100°

मॉड्यूल III

व्यावसायिक गणित

जीवन में लेन-देन वाली संक्रियाएं हमारे उस ज्ञान पर निर्भर करती हैं, जिसे व्यावसायिक गणित कहते हैं। व्यावसायिक गणित के अध्ययन का आधार, अनुपात और समानुपात, सीधा और प्रतिलोम विचलन (विचरण), एकक विधि और प्रतिशत की मूलभूत संकल्पनाएं हैं।

इस मॉड्यूल में अनुपात और दो अनुपातों की बराबरी के रूप में समानुपात की संकल्पनाएं सीखेंगे। आप ऐसी दो संख्याओं, जिनका गुणनफल, एक पूर्ण वर्ग है, का मध्यानुपाती प्राप्त कर सकेंगे।

आप सीधे और प्रतिलोम विचलन (विचरण) की संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे। आप एकक विधि भी सीखेंगे। आप इन संकल्पनाओं के प्रयोग से 'समय और कार्य' तथा 'समय और दूरी' की सरल समस्याओं को हल कर सकेंगे।

आपका भिन्न अथवा अनुपात के रूप में प्रतिशत की धारणा से परिचय होगा। आप इसके प्रयोग से लाभ और हानि की सरल समस्याओं का अध्ययन करेंगे और इसमें क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य का प्रयोग करेंगे। आप बट्टे की संकल्पना सीखेंगे तथा लाभ और हानि की समस्याओं में इसका प्रयोग भी करेंगे।

हमारी जमा राशि पर बैंक हमें ब्याज देते हैं और जनता को दिए हुए ऋण पर ब्याज लेते हैं। आप किसी धन राशि (मूलधन) पर दिए गए समय में (तीन वर्ष से अधिक नहीं, यदि ब्याज का संयोजन वार्षिक हो) साधारण तथा चक्रवृद्धि ब्याज की संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे।

7

अनुपात तथा समानुपात

माना राम के पास ₹ 200 हैं तथा अहमद के पास ₹ 50 है। हम कह सकते हैं कि राम के पास अहमद से ₹ (200–50) अर्थात् ₹ 150 अधिक है। इसी प्रकार यदि जूली के पास 10 खिलौने हैं तथा शीला के पास 5 खिलौने हैं, तो हम कह सकते हैं कि जूली के पास शीला से 5 खिलौने अधिक हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि संख्याओं की तुलना करने की एक विधि उनका अंतर ज्ञात करना है।

क्या यह विधि सदैव सुविधाजनक रहती है? आइए, एक और उदाहरण लीजिए। माना पुस्तकालय A में 300000 पुस्तकें तथा पुस्तकालय B में 5000 पुस्तकें हैं। यहां यह कहने से कि पुस्तकालय A में पुस्तकालय B से 295000 पुस्तकें अधिक हैं, यह कहना अधिक सुविधाजनक है कि पुस्तकालय A में पुस्तकालय B से $\frac{300000}{5000}$ गुना अर्थात् 60 गुना पुस्तकें हैं। इसी प्रकार हम कह सकते हैं कि जूली के पास शीला से 2 गुने अर्थात् दुगुने खिलौने हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि संख्याओं की तुलना करने की अन्य विधि विभाजन अथवा भाग द्वारा है। इसको हम अनुपात द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- अनुपात की परिभाषा
- समानुपात की परिभाषा
- सरल और मिश्र अनुपात की परिभाषा
- इनके प्रयोग से कुछ प्रश्नों को हल करना
- इसके प्रयोग से समय और काम तथा समय और दूरी के प्रश्न हल करना

7.1 अनुपात

परिभाषा : समान इकाई वाली दो राशियों की तुलना का वह संबंध, जिसमें एक राशि दूसरी राशि की कितनी गुना (अथवा भाग) है, इन राशियों का अनुपात कहलाता है।

टिप्पणी

अनुपात को राशियों के बीच (:) रखकर व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार हम कहते हैं कि जूली तथा शीला के खिलौनों की संख्या में 2 : 1 का अनुपात है तथा पुस्तकालय A की पुस्तकों की संख्या तथा पुस्तकालय B की पुस्तकों की संख्या में 60 : 1 का अनुपात है।

जिन दो राशियों अथवा संख्याओं की तुलना की जाती है, उन्हें अनुपात के पद कहते हैं। पहला पद पूर्वपद (Antecedent) तथा दूसरा पद परपद (Consequent) कहलाता है। इस प्रकार अनुपात 12 :5 में 12 पूर्वपद है तथा 5 परपद है। क्या आप बता सकते हैं कि 9 :13 में पूर्वपद क्या है तथा परपद क्या है?

ध्यान दीजिए कि अनुपात केवल समान प्रकार की राशियों, एक ही प्रकार की वस्तुओं अथवा मापन के एक ही प्रकार के मात्रकों में ही होता है। पुस्तकों तथा खिलौनों की तुलना करना कुछ अजीब-सा लगता है। कभी-कभी अनुपात को एक भिन्न के रूप में भी लिखा जाता है, जैसे-

4 : 1 को $\frac{4}{1}$ से, 15 :7 को $\frac{15}{7}$ से इत्यादि।

आइए अब अनुपात 12 :8 को देखिए। उपरोक्त कथन के अनुसार हम इसे $\frac{12}{8}$ से भी व्यक्त कर सकते हैं, क्योंकि एक भिन्न को सदा उसके न्यूनतम रूप में लिखा जाता है, इसलिए $\frac{12}{8}$ को हम $\frac{3}{2}$ लिख सकते हैं। अत: 12 :8 को 3 : 2 भी लिखा जा सकता है, इसी प्रकार 18 :42 को 3 :7 भी लिखा जा सकता है। इसलिए, किसी अनुपात की दोनों राशियों को एक ही संख्या (जो शून्य न हो) से गुणा अथवा भाग करने पर अनुपात के मान में कोई अंतर नहीं आता।

क्योंकि $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$, अत: 12 :8 = 3 :2

$\frac{3}{7}=\frac{18}{42}$, अत: 3 :7 = 18 :42

सदैव याद रखिए, दो राशियों के बीच अनुपात एक विशुद्ध संख्या (बिना किसी मात्रक के) होती है। इसलिए 12 लीटर का 18 लीटर से अनुपात $\frac{12}{18}$ अथवा $\frac{2}{3}$ अथवा 2 :3 है।

25 सेमी का 40 सेमी से अनुपात $\frac{25}{40}$ अथवा $\frac{5}{8}$ अथवा 5 :8 है।

आइए कुछ उदाहरण देकर उपरोक्त को स्पष्ट करें।

उदाहरण 7.1: निम्नलिखित में अनुपात ज्ञात कीजिए:

(i) 38 तथा 114

(ii) 165 सेमी तथा 220 सेमी

(iii) ₹ 17.20 तथा ₹ 86.00

(iv) 2 किलोग्राम तथा 500 ग्राम

हल: (i) हम जानते हैं कि अनुपात को एक भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है।

इसलिए $38 : 114 = \frac{38}{114}$

यदि संभव हो तो इसे न्यूनतम रूप में लिखने का प्रयास कीजिए।

38 तथा 114 को क्रमशः 19×2 और $19 \times 2 \times 3$ लिख सकते हैं

इसलिए $\frac{38}{114} = \frac{19 \times 2}{19 \times 2 \times 3} = \frac{1}{3}$

अतः $38 : 114 = 1 : 3$

(ii) 165 सेमी तथा 220 सेमी

क्योंकि अनुपात एक विशुद्ध संख्या है, अतः 165 सेमी तथा 220 सेमी में

अनुपात $= 165 : 220$ अथवा $\frac{165}{220}$

क्योंकि 165 तथा 220 का म. स. (HCF) 55 है,

अतः $\frac{165}{220} = \frac{165 \div 55}{220 \div 55} = \frac{3}{4}$

अतः 165 सेमी तथा 220 सेमी में $3 : 4$ का अनुपात है।

टिप्पणी: पहले उदाहरण में हमने गुणनखंड बनाए हैं और इस उदाहरण में म. स. का प्रयोग किया है। आप कोई भी विधि अपना सकते हैं।

(iii) ₹ 17.20 तथा ₹ 86.00 का अनुपात है $17.20 : 86.00$

अथवा $\frac{1720}{8600} = \frac{1}{5}$

अत: ₹ 17.20 तथा ₹ 86.00 का अनुपात 1 : 5 है।

(iv) 2 किलोग्राम = 2000 ग्राम

इसलिए 2 किलोग्राम तथा 500 ग्राम का अनुपात = 2000 : 500 अथवा 4 : 1

अत: अभीष्ट अनुपात = 4 : 1

उदाहरण 7.2: एक स्कूल में 100 लड़के तथा 80 लड़कियां हैं। निम्न अनुपात ज्ञात कीजिए:

(i) लड़कों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से

(ii) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से

हल : (i) कुल विद्यार्थियों की संख्या = (लड़कों की संख्या) + (लड़कियों की संख्या)

$$= 100 + 80 = 180$$

इसलिए लड़कों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात = 100 : 180

क्योंकि $\frac{100}{180} = \frac{5}{9}$, इसलिए इच्छित अनुपात = 5 : 9

(ii) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात = 80 : 100

= 4 : 5 (दोनों पदों को 20 से भाग देने पर)

देखें आपने कितना सीखा 7.1

1. निम्नलिखित में अनुपात ज्ञात कीजिए।

   (i) 8 तथा 168 (ii) 2.5 तथा 7.5 (iii) ₹ 11.50 और ₹ 115

   (iv) 25 पैसे तथा ₹ 75 (v) 15 मीटर तथा 250 सेमी

2. एक रेलगाड़ी की औसत चाल 45 किलोमीटर प्रति घंटा तथा दूसरी रेलगाड़ी की औसत चाल 75 किलोमीटर प्रति घंटा है। दोनों रेलगाड़ियों की औसत चाल में अनुपात ज्ञात कीजिए।

3. किसी कंपनी में काम करने वाले 50 व्यक्तियों में से 22 पुरुष तथा शेष स्त्रियां हैं। पुरुषों की संख्या का स्त्रियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. एक परिवार की कुल मासिक आय ₹ 15000 है। यदि परिवार ₹ 3000 प्रति मास बचाता है, तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए:

   (i) आय का व्यय से (ii) आय का बचत से (iii) बचत का व्यय से

टिप्पणी

5. 260 विद्यार्थियों ने एक परीक्षा दी। उसमें से 130 पास हुए। निम्न अनुपात ज्ञात कीजिए:

   (i) कुल परीक्षा देने वाले तथा पास होने वाले विद्यार्थियों का

   (ii) पास होने वाले तथा फेल होने वाले विद्यार्थियों का

7.2 समानुपात

हम ऊपर पढ़ चुके हैं कि किसी अनुपात की राशियों को एक ही संख्या ($\neq 0$) से गुणा (अथवा भाग देने) करने पर अनुपात में अंतर नहीं आता।

अत: $3:9 = 1:3 = 7:21$

इसी प्रकार $9:270 = 1:30 = 5:150$

ध्यान दीजिए कि एक अनुपात को पहले न्यूनतम रूप में लिखा है और फिर उसके दोनों पदों को एक ही संख्या से गुणा किया गया है।

जब भी हमें दो बराबर अनुपात मिलते हैं, हम कहते हैं कि वे एक समानुपात बनाते हैं।

इस प्रकार दो अनुपातों की समानता का कथन एक समानुपात कहलाता है।

इसलिए हम कह सकते हैं कि चार राशियां एक समानुपात बनाती हैं, यदि पहली तथा दूसरी का अनुपात, तीसरी तथा चौथी के अनुपात के बराबर हो। अत: चार राशियां a, b, c तथा d एक समानुपात बनाती है। यदि

$$a:b=c:d$$

अर्थात् $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$ ...(1)

a, b, c तथा d समानुपात के पद कहे जाते हैं। पहला पद (यहां a) तथा अंतिम पद (यहां d) सिरों के पद (extremes) तथा दूसरा पद (यहां b) एवं तीसरा पद (यहां c) मध्य के पद (means) कहलाते हैं।

(1) से हम देखते हैं कि सिरों के पदों का गुणनफल मध्य के पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

यदि किसी समानुपात में मध्य के दोनों पद बराबर हों, तो उन्हें मध्य समानुपाती कहते हैं। जैसे–

$a:b=b:c$ अथवा $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

में a तथा c का मध्य समानुपाती b है।

आइए, उदाहरण लेकर उपरोक्त को स्पष्ट करें।

उदाहरण 7.3: निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं? कारण भी लिखिए।

(i) $3:4 = 45:60$ (ii) $3:2 = 9:8$ (iii) $39:117 = 1:3$

(iv) $15:7 = 45:24$

हल : (i) $3:4 = 45:60$

मध्य पदों का गुणनफल $= 4 \times 45 = 180$

सिरों के पदों का गुणनफल $= 3 \times 60 = 180$

अत: $3:4 = 45:60$ सत्य कथन है।

(ii) $3:2 = 9:8$

मध्य पदों का गुणनफल $= 9 \times 2 = 18$

सिरों के पदों का गुणनफल $= 3 \times 8 = 24$

क्योंकि $18 \neq 24$, अत: $3:2 = 9:8$ असत्य कथन है।

(iii) $39:117 = 1:3$

मध्य पदों का गुणनफल $= 117 \times 1 = 117$

सिरों के पदों का गुणनफल $= 39 \times 3 = 117$

अत: $39:117 = 1:3$ सत्य कथन है।

(iv) $15:7 = 45:24$

मध्य पदों का गुणनफल $= 7 \times 45 = 315$

सिरों के पदों का गुणनफल $= 15 \times 24 = 360$

क्योंकि $315 \neq 360$, अत: $15:7 = 45:24$ असत्य कथन है।

उदाहरण 7.4 : एक समानुपात के प्रथम तीन पद 4, 12 तथा 18 हैं। समानुपात का चौथा पद ज्ञात कीजिए।

हल : माना समानुपात का चौथा पद x है

अत: $4:12 = 18:x$

अत: $4x = 12 \times 18$

अथवा $x = \dfrac{12 \times 18}{4} = 54$

अतः समानुपात का चौथा पद 54 है।

उदाहरण 7.5 : 3 तथा 27 का मध्य समानुपाती निकालिए।

हल : मान लें कि मध्य समानुपाती x है।

अतः $3 : x = x : 27$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{x} = \frac{x}{27} \Rightarrow x^2 = 81 = 9^2$$

$$\Rightarrow \quad x = 9$$

अतः 3 तथा 27 का मध्य समानुपाती 9 है।

देखें आपने कितना सीखा 7.2

1. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं?

   (i) $4 : 5 = 28 : 35$ (ii) $7 : 9 = 42 : 27$ (iii) $\frac{13}{2} : \frac{15}{2} = 3.25 : 3.75$

2. निम्नलिखित समानुपातों के लिए, x के मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $24 : 36 = 36 : x$ (ii) $5 : 7 = 15 : x$ (iii) $\frac{34}{3} : 12 = 17 : x$

3. निम्नलिखित संख्या का मध्य समानुपाती ज्ञात कीजिए:

   (i) 2 तथा 8 (ii) 4 तथा 16 (iii) 6 तथा 216

   (iv) 5 तथा 125

7.3 समानुपात के प्रकार

समानुपात दो प्रकार के होते हैं:

(अ) अनुक्रम (सीधा) समानुपात

(ब) व्युत्क्रम (उल्टा) समानुपात

आइए, एक-एक करके इनके विषय में जानें:

जब किसी समानुपात में दो राशियां इस प्रकार संबंधित हों कि यदि एक में वृद्धि (या कमी) होती है तो दूसरे में भी उसी अनुपात में वृद्धि (या कमी) हो जाती है तो उसे अनुक्रम समानुपात कहा जाता है। उदाहरण के लिए: अधिक खिलौने, अधिक मूल्य; कम संतरे, कम मूल्य, इत्यादि।

टिप्पणी

दूसरी ओर, यदि किसी समानुपात में दो राशियां इस प्रकार संबंधित हो कि एक में वृद्धि होने पर दूसरे में उसी अनुपात में कमी हो जाती है तो वह समानुपात व्युत्क्रम समानुपात कहलाता है। उदाहरण के लिए, यदि कामगारों की संख्या में वृद्धि की जाए, तो दिनों की संख्या में उसी अनुपात में कमी हो जाती है।

आइए, उदाहरण लेकर उपरोक्त को स्पष्ट करें:

उदाहरण 7.6 : 5 दर्जन संतरों का मूल्य ₹ 120 है। 7 दर्जन संतरों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : यह अनुक्रम समानुपात की एक स्थिति है। जिस प्रकार संतरे 5 दर्जन से 7 दर्जन हुए, उसी अनुपात में मूल्य में वृद्धि होगी।

संतरे	मूल्य
5 दर्जन	₹ 120
7 दर्जन	₹ x

अत: $5 : 7 = 120 : x$

$\therefore \quad 5 \times x = 7 \times 120$

अर्थात् $x = \dfrac{7 \times 120}{5} = 7 \times 24 = 168$

अत: 7 दर्जन संतरों का मूल्य 168 रुपये है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि यदि x और y अनुक्रम समानुपाती हैं, तो $x : y$ अथवा $\dfrac{x}{y}$ सदा स्थिर रहता है।

जैसे ऊपर के उदाहरण में,

$x = 5$ दर्जन

$y =$ ₹ 120

और $x : y = 5 : 120$

या $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{120} = \dfrac{1}{24}$ स्थिर है। उसी प्रकार यदि $\dfrac{x}{y} = k$ तब $x = ky$ । यहां k स्थिर है। हम कहते हैं कि x तथा y अनुक्रम समानुपाती हैं।

उदाहरण 7.7 : एक साइकिल सवार 10 किलोमीटर प्रति घंटे की औसत चाल से कुछ दूरी $3\frac{1}{2}$ घंटे में तय करता है। यदि वह अपनी औसत चाल 14 किलोमीटर प्रति घंटा कर दे, तो उसी दूरी को तय करने में उसे कितना समय लगेगा?

हल : स्पष्ट है कि यह व्युत्क्रम समानुपात की स्थिति है, क्योंकि चाल बढ़ने पर समय कम लगेगा

औसत चाल (किलोमीटर/ घंटा)	समय (घंटों में)
10	$3\frac{1}{2}$
14	x

इसलिए $\quad 10:14 = x : 3\frac{1}{2}$

अत: $\frac{10 \times 7}{2} = x \times 14$

या $x = \frac{10 \times 7}{2 \times 14} = 2\frac{1}{2}$

अत: 14 किलोमीटर/ घंटे की औसत चाल से दूरी तय करने में $2\frac{1}{2}$ घंटे लगेंगे।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि यदि x तथा y व्युत्क्रम समानुपाती हैं, तो x.y सदा स्थिर रहता है। जैसे ऊपर के उदाहरण में,

$x = 10$ किलोमीटर/ घंटा

$y = 3\frac{1}{2}$ घंटे

इस कारण, $x.y = 10 \times \frac{7}{2} = 35$ स्थिर है।

इसी प्रकार यदि $x.y = k$, तब

$x = \frac{k}{y}$

यहां k स्थिर है।

हम कहते हैं कि x तथा y व्युत्क्रम समानुपाती हैं।

देखें आपने कितना सीखा 7.3

1. एक व्यक्ति ₹ 360 में 3 किलोग्राम शहद खरीदता है। ₹ 810 में वह कितना शहद खरीद सकता है?
2. शीतल पेय की 20 बोतलों की कीमत ₹ 800 है। उसी प्रकार की 35 बोतलों की क्या कीमत होगी?
3. यदि 50 व्यक्ति एक दीवार को 15 दिन में बना सकते हैं, तो 75 व्यक्ति उसी प्रकार की दीवार को कितने दिनों में बना पाएंगे?
4. यदि 25 व्यक्ति एक खेत की फसल को 9 दिन में काट सकते हैं, तो 15 व्यक्ति उसी खेत की फसल को कितने दिनों में काट पाएंगे?
5. एक अनाज का भंडार 500 व्यक्तियों के लिए 40 दिनों के लिए पर्याप्त है। यही भंडार 800 व्यक्तियों के लिए कितने दिन चलेगा?
6. 10 मीटर ऊंची एक पहाड़ी की छाया दिन के किसी समय 8 मीटर लंबी है। उसी समय में एक अन्य पहाड़ी की छाया 12 मीटर है। दूसरी पहाड़ी की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
7. 24 नारियलों का मूल्य ₹ 480 है। वैसे ही 120 नारियलों का मूल्य ज्ञात कीजिए।
8. 10 व्यक्ति एक सड़क को 6 दिन में बना सकते हैं। 15 व्यक्ति उस सड़क को कितने दिनों में बना पाएंगे?

7.4 ऐकिक नियम

जब कुछ वस्तुओं का मूल्य दिया हो तथा हमें उसी वस्तु की किसी अन्य संख्या का मूल्य ज्ञात करना हो, तो

(i) एक तरीका समानुपात के प्रयोग से है

जैसे यदि 5 किलोग्राम गेहूं का मूल्य ₹ 100 है तो 16 किलोग्राम गेहूं का क्या मूल्य होगा?

अधिक गेहूं अधिक मूल्य, अतः यह अनुक्रम समानुपात का उदाहरण है।

अतः माना इच्छित मूल्य ₹ x है।

तो $5 : 100 = 16 : x$

अतः $100 \times 16 = 5 \times x$

अथवा $x = \dfrac{100 \times 16}{5} = 320$

अर्थात् 16 किलोग्राम गेहूं का मूल्य ₹ 320 है।

टिप्पणी

(ii) एक अन्य तरीका है–पहले हम एक वस्तु (अथवा एकक) का मूल्य ज्ञात करते हैं। फिर जितनी संख्या का मूल्य ज्ञात करना हो, उसे उससे गुणा करके ज्ञात कर लेते हैं, क्योंकि पहले हम एक वस्तु (अथवा एकक) का मूल्य ज्ञात करते हैं, इसलिए इसको ऐकिक नियम (Unitary Method) कहा जाता है।

आइए उपरोक्त उदाहरण को ऐकिक नियम से हल करें।

5 किलोग्राम गेहूं का मूल्य = ₹ 100

1 किलोग्राम गेहूं का मूल्य = ₹ $\left(\frac{100}{5}\right)$ अथवा ₹ 20

अत: 16 किलोग्राम गेहूं का मूल्य = (16×20) अर्थात् ₹ 320

उदाहरण 7.8 : यदि 10 साबुन की टिकियों का मूल्य ₹ 150 तथा 4 दंत मंजनों का मूल्य ₹ 60 है, तो 6 साबुन की टिकियों तथा दो दंत मंजनों का कुल मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : 10 साबुन की टिकियों का मूल्य = ₹ 150

1 साबुन की टिकिया का मूल्य = ₹ $\frac{150}{10}$ अथवा ₹ 15

तो 6 साबुन की टिकियों का मूल्य = ₹ (15×6) = ₹ 90 ...(i)

4 दंत मंजनों का मूल्य = ₹ 60

1 दंत मंजन का मूल्य = ₹ $\left(\frac{60}{4}\right)$

तो 2 दंत मंजनों का मूल्य = ₹ $\left(\frac{60}{4}\times 2\right)$ = ₹ 30 ...(ii)

इसलिए 6 साबुन की टिकियों तथा 2 दंत मंजनों का कुल मूल्य

= ₹ (90+30) = ₹ 120

देखें आपने कितना सीखा 7.4

1. यदि 4 किलोग्राम चीनी का मूल्य ₹ 120 हो, तो एक क्विंटल (100 किलोग्राम) चीनी का मूल्य ज्ञात कीजिए।

2. यदि किसी पुस्तक की 25 प्रतियों का मूल्य ₹ 525 हो, तो उसी पुस्तक की 10 प्रतियों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

3. यदि किसी दवाई की एक दर्जन शीशियों का मूल्य ₹ 612 है, तो ऐसी 4 शीशियों का कितना मूल्य होगा?

4. यदि एक दर्जन तेल की शीशियों का मूल्य ₹ 720 तथा 6 अचार के डिब्बों का मूल्य ₹ 240 है, तो चार तेल की शीशियों तथा 3 अचार के डिब्बों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

5. एक दीवार को 15 व्यक्ति मिलकर 10 दिन में बना सकते हैं, तो 10 व्यक्ति उसी दीवार को कितने समय में बना पाएंगे?

6. पांच व्यक्ति मिलकर एक खेत को 8 दिन में काट सकते हैं, तो उसी खेत को 2 दिन में काटने के लिए आवश्यक व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7.5 समय और काम

कभी-कभी हमें कार्यों की समाप्ति की अवधि निर्धारण करने का निश्चय करना पड़ता है। उदाहरण के लिए, यदि मैं 3 घंटे प्रतिदिन काम करू, तो मुझे किसी काम को पूरा करने में कितने दिन लगेंगे अथवा घर का फर्श बनवाने में कितने मजदूर लगाऊं कि कार्य 2 दिन में समाप्त हो जाए?

इस प्रकार के प्रश्न हम समय और काम के अंतर्गत लेंगे तथा इनको हल करने के विषय में आपको बताएंगे।

7.5.1 काम तथा अनुपात

हम इस पाठ में अनुपात के बारे में पढ़ चुके हैं। आइए उसका प्रयोग समझें।

यदि एक व्यक्ति एक कार्य को 15 दिन में कर सकता है तथा दूसरा व्यक्ति उसी काम को 20 दिन में कर सकता है, तो दोनों के एक दिन के काम को उनकी कार्य क्षमता कहा जाता है।

अत: पहले तथा दूसरे व्यक्ति की कार्य क्षमता में $\frac{1}{15} : \frac{1}{20}$ अर्थात् 4 : 3 का अनुपात है। इसी तथ्य को आधार मानकर तथा अनुपात के प्रारूपों की सहायता लेकर हम समय और काम के प्रश्नों को हल करेंगे।

आइए, कुछ उदाहरण लेकर इसे स्पष्ट करें:

उदाहरण 7.9 : राम एक काम को 15 दिन में कर सकता है तथा श्याम 10 दिन में। दोनों मिलकर उस काम को कितने दिनों में करेंगे?

हल : राम का एक दिन का काम $= \frac{1}{15}$

श्याम का एक दिन का काम $= \frac{1}{10}$

राम तथा श्याम का मिलकर एक दिन का काम $= \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$

$$= \frac{2+3}{30} = \frac{1}{6}$$

अतः राम तथा श्याम मिलकर उस काम को 6 दिन में करेंगे।

उदाहरण 7.10 : लता तथा सोना मिलकर एक काम को 20 दिन में कर सकते हैं। यदि लता अकेली उसी काम को 30 दिन में कर सकती हो, तो सोना उस काम को कितने दिनों में करेगी?

हल : लता तथा सोना का एक दिन का काम $= \frac{1}{20}$

लता का एक दिन का काम $= \frac{1}{30}$

अतः सोना का एक दिन का काम $= \frac{1}{20} - \frac{1}{30}$

$$= \frac{3-2}{60} = \frac{1}{60}$$

अतः सोना उस काम को 60 दिन में करेगी।

उदाहरण 7.11 : कर्ण तथा अहमद एक काम को क्रमशः 15 तथा 20 दिन में कर सकते हैं। दोनों ने मिलकर 6 दिन काम किया और फिर कर्ण चला गया। शेष काम अहमद कितने दिनों में करेगा?

हल : कर्ण तथा अहमद का मिलकर एक दिन का काम $= \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{4+3}{60} = \frac{7}{60}$

कर्ण तथा अहमद का 6 दिन का काम $= \frac{7 \times 6}{60} = \frac{7}{10}$

शेष काम $= 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

अहमद शेष काम को $\left(\frac{3 \times 20}{10}\right)$ अर्थात् 6 दिन में करेगा।

उदाहरण 7.12 : रमा तथा केवल एक काम को क्रमशः 12 तथा 18 दिन में कर सकते हैं। दोनों ने मिलकर ₹ 1720 में काम का ठेका लिया। ठेके की राशि में दोनों का भाग ज्ञात कीजिए।

हल : रमा तथा केवल की कार्य क्षमताओं का अनुपात $= \frac{1}{12} : \frac{1}{18}$

$= 3 : 2$

अतः ठेके की राशि में रमा का भाग $= ₹ \left(\frac{3 \times 1720}{5}\right) = ₹\ 1032$

केवल का भाग = ₹ 1720 – ₹ 1032 = ₹ 688

उदाहरण 7.13 : जोसेफ तथा रीना एक काम को क्रमशः 12 तथा 24 दिन में कर सकते हैं। दोनों ने मिलकर काम आरंभ किया। जोसेफ काम समाप्त होने से 3 दिन पहले चला गया तथा शेष काम रीना ने अकेले किया। कुल कार्य कितने दिनों में समाप्त हुआ?

हल : जोसेफ तथा रीना का एक दिन का काम $= \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{2+1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

माना कुल कार्य x दिन में समाप्त हुआ।

$\therefore$ दोनों ने मिलकर (x – 3) दिन में काम किया $= \frac{x-3}{8}$

रीना का 3 दिन का काम $= \frac{3 \times 1}{24} = \frac{1}{8}$

अतः $\frac{x-3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

या $x - 3 + 1 = 8$

या $x = 10$

अतः काम 10 दिन में समाप्त हुआ।

देखें आपने कितना सीखा 7.5

1. A तथा B एक काम को क्रमशः 10 दिन तथा 15 दिन में कर सकते हैं। दोनों मिलकर उस काम को कितने दिनों में करेंगे?

2. रमा, शीला तथा जुबैदा एक काम को क्रमशः 8, 12 तथा 24 दिनों में कर सकती हैं। तीनों मिलकर उस काम को कितने दिनों में करेंगी?

3. A, B तथा C मिलकर एक काम को 20 दिन में कर सकते हैं। यदि A तथा B अकेले उस काम को क्रमशः 40 तथा 60 दिनों में कर सकते हों, तो C अकेला उसे कितने दिनों में करेगा?

4. करम सिंह तथा रोमिला मिलकर एक काम को 24 दिन में कर सकते हैं। यदि करम सिंह अकेला उस काम को 36 दिन में करें, तो रोमिला अकेली उसे कितने दिनों में कर सकेगी?

5. A तथा B मिलकर एक काम को 8 दिन में कर सकते हैं। दोनों ने 6 दिन मिलकर काम किया तथा शेष काम B ने अकेले 6 दिन में समाप्त किया। A तथा B की कार्य क्षमताएं ज्ञात कीजिए।

6. रमन तथा विकास एक कार्य को क्रमशः 16 दिन तथा 24 दिन में कर सकते हैं। दोनों ने मिलकर 6 दिन काम किया और फिर रमन चला गया। शेष काम विकास ने अकेले कितने दिन में समाप्त किया?

7.6 समय और दूरी

हमारे प्रतिदिन के कामकाज में समय और दूरी का विशेष महत्व है। समय से काम पर पहुंचने के लिए किसी भी व्यक्ति को ध्यान रखना पड़ता है कि कितने बजे घर से चले कि निर्दिष्ट स्थान पर समय से पहुंच सके। यह अनुमान तभी संभव है, जब उसके मन में चाल (Speed) का भी एक निश्चित अनुमान हो। यदि 10 किलोमीटर की दूरी तय करनी है तथा 4 किलोमीटर प्रति घंटे की चाल है, तो दूरी तय करने में समय लगेगा

$$\left(\frac{10}{4}\right) \text{ घंटे, अर्थात् } 2\frac{1}{2} \text{ घंटे}$$

इसलिए हम कह सकते हैं कि

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

अथवा,
$$\text{दूरी} = \text{समय} \times \text{चाल} \qquad ...(i)$$

$$(\text{distance}) = (\text{time}) \times (\text{speed})$$

समय और दूरी के प्रश्नों में हमारा मूल सिद्धांत यही होगा

इसी से हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होते हैं

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} \qquad ...(ii)$$

$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} \qquad ...(iii)$$

टिप्पणी

उदाहरण देखने से पहले कुछ नियमों के विषय में जानें। यदि दो वाहन, चालों a तथा b से

(i) विपरीत दिशाओं में जा रहे हों, तो उनकी सापेक्षिक चाल (Relative Speed), (a+b) होती है।

(ii) एक ही दिशा में जा रहे हों, तो उनकी सापेक्षिक चाल (a–b) होती है, जबकि $a > b$

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 7.14 : एक रेलगाड़ी 60 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से जा रही है। उसकी चाल प्रति सेकेंड ज्ञात कीजिए।

हल : 3600 सेकेंड में गाड़ी जाती है = 60 किलोमीटर

अत: 1 सेकेंड में गाड़ी जाती है $= \dfrac{60}{3600}$ किलोमीटर

$= \dfrac{1}{60}$ किलोमीटर

$= \left(\dfrac{1 \times 1000}{60}\right)$ मीटर

$= \dfrac{50}{3}$ मीटर $= 16\dfrac{2}{3}$ मीटर

अत: गाड़ी की चाल $16\dfrac{2}{3}$ मीटर प्रति सेकेंड है।

उदाहरण 7.15 : A तथा B एक ही समय अपने घरों से, जिनके बीच की दूरी 40 किलोमीटर है, एक-दूसरे की ओर 4 किलोमीटर घंटे तथा 6 किलोमीटर प्रति घंटे की चाल से जा रहे हैं। वह कितने समय बाद तथा कहां मिलेंगे?

हल : क्योंकि A तथा B विपरीत दिशाओं में चल रहे हैं।

अत: उनकी सापेक्ष गति (6 + 4) किलोमीटर प्रति घंटा

= 10 किलोमीटर प्रति घंटा

अत: 40 किलोमीटर की दूरी को तय करने में लगा समय

$= \dfrac{40}{10}$ घंटे

= 4 घंटे

4 घंटे में A ने (4×4) किलोमीटर अर्थात् 16 किलोमीटर दूरी तय की

अत: जब 4 घंटे बाद A ने 16 किलोमीटर की दूरी तथा B ने 24 किलोमीटर की दूरी तय की, तब वह मिलेंगे।

उदाहरण 7.16 : एक रेलगाड़ी 60 किलोमीटर प्रति घंटे की चाल से जा रही है। यदि गाड़ी की लंबाई 200 मीटर हो, तो वह रेलगाड़ी एक खंभे को कितने समय में पार करेगी?

हल : एक खंभे को पार करने में रेलगाड़ी को अपनी लंबाई के बराबर की दूरी पार करनी पड़ेगी।

रेलगाड़ी 60×1000 मीटर की दूरी पार करती है = 3600 सेकेंड में

रेलगाड़ी 1 मीटर की दूरी पार करती है = $\dfrac{3600}{60\times1000}$ सेकेंड में

रेलगाड़ी 200 मीटर की दूरी पार करती है = $\left(\dfrac{3600\times200}{60\times1000}\right)$ सेकेंड में

= 12 सेकेंड में

अत: रेलगाड़ी खंभे को 12 सेकेंड में पार करेगी।

उदाहरण 7.17 : एक रेलगाड़ी 80 किलोमीटर प्रति घंटे की चाल से जा रही है। यदि गाड़ी की लंबाई 120 मीटर है, तो वह 180 मीटर लंबे प्लेटफार्म को कितने समय में पार करेगी?

हल : रेलगाड़ी का प्लेटफार्म को पार करने का अर्थ है कि रेलगाड़ी अपनी लंबाई तथा प्लेटफार्म की लंबाई दोनों को मिलाकर दूरी पार करे।

रेलगाड़ी तथा प्लेटफार्म की सम्मिलित लंबाई = $(120+180)$ मीटर

= 300 मीटर

रेलगाड़ी (80×1000) मीटर की दूरी पार करती है 3600 सेकेंड में

रेलगाड़ी 1 मीटर की दूरी तय करती है $\dfrac{3600}{80\times1000}$ सेकेंड में

रेलगाड़ी 300 मीटर की दूरी तय करती है $\dfrac{3600\times300}{80\times1000}$ सेकेंड में

= $13\dfrac{1}{2}$ सेकेंड में

अत: रेलगाड़ी प्लेटफार्म को $13\dfrac{1}{2}$ सेकेंड में पार करेगी।

उदाहरण 7.18 : यदि एक रेलगाड़ी, जो 60 किलोमीटर प्रति घंटे की चाल से जा रही है, एक 220 मीटर लंबे पुल को 24 सेकेंड में पार करती है, तो रेलगाड़ी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना रेलगाड़ी की लंबाई = x मीटर

पुल तथा गाड़ी की लंबाई = (220 + x) मीटर

3600 सेकेंड में रेलगाड़ी जाती है = 60 × 1000 मीटर

तो 24 सेकेंड में रेलगाड़ी जाती है $= \left(\frac{60 \times 1000 \times 24}{3600}\right)$ मीटर

= 400 मीटर

220 + x = 400

अत: x = 400 – 220 = 180

अत: रेलगाड़ी की लंबाई 180 मीटर है।

उदाहरण 7.19 : दो धावक एक दौड़ में भाग लेते हैं। धावक A, धावक B को दौड़ने से पहले 100 मीटर आगे जाने देता है और फिर दौड़ता है। यदि पहला धावक A, 6 मिनट में एक किलोमीटर की दूरी तय करता है तथा दूसरा धावक B, 10 मिनट में एक किलोमीटर दूरी तय करतर है तो ज्ञात कीजिए कि धावक A, धावक B को कितने समय बाद पकड़ लेगा?

हल : धावक A, 6 मिनट में जाता है = 1 किलोमीटर

धावक A, 10 मिनट में जाता है $= \left(\frac{1 \times 10}{6}\right)$ किलोमीटर अथवा $\frac{5}{3}$ किलोमीटर

अत: 10 मिनट में धावक A, धावक B से $\left(\frac{5}{3} - 1\right)$ या $\frac{2}{3}$ किलोमीटर अधिक दूरी तय करता है।

A, $\left(\frac{2 \times 1000}{3}\right)$ मीटर अधिक दौड़ता है 10 मिनट में

अत: A, 100 मीटर अधिक दौड़ता है $\left(\frac{10 \times 3 \times 100}{2 \times 1000}\right)$ मिनट में

[$\because$ धावक A को 100 मी. की दूरी अधिक तय करनी है]

$= 1\frac{1}{2}$ मिनट में

अत: $1\frac{1}{2}$ मिनट में धावक A, धावक B को पकड़ लेगा।

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 7.6

1. एक रेलगाड़ी 72 किलोमीटर प्रति घंटे की एक समान चाल से चल रही है। वह 15 सेकेंड में कितनी दूरी तय करेगी?

2. एक रेलगाड़ी एक घंटे में 60 किलोमीटर की दूरी तय करती है तथा एक कार 300 मीटर की दूरी 15 सेकेंड में तय करती है। कौन-सा वाहन अधिक चाल से चल रहा है?

3. एक रेलगाड़ी, जिसकी लंबाई 300 मीटर है, 120 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से जा रही है। वह एक खंभे को कितनी देर में पार करेगी?

4. एक रेलगाड़ी, जिसकी लंबाई 200 मीटर है, एक खंभे को 12 सेकेंड में पार करती है। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए?

5. 200 मीटर लंबी रेलगाड़ी, जो 72 किलोमीटर प्रति घंटे की चाल से जा रही है, एक 280 मीटर लंबे प्लेटफार्म को कितनी देर में पार करेगी?

6. 360 मीटर लंबी रेलगाड़ी एक 40 मीटर लंबे पुल को 20 सेकेंड में पार कर लेती है। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए।

7. दो धावक P तथा Q एक दौड़ में भाग लेते हैं। धावक Q धावक P को 200 मीटर आगे दौड़ने की छूट देकर दौड़ना आरंभ करता है। यदि धावक P, 18 मिनट में एक किलोमीटर तथा धावक Q, 12 मिनट में एक किलोमीटर दौड़ता हो, तो धावक Q, धावक P को कितने समय में पकड़ लेगा?

आइए दोहराएं

- दो राशियों x तथा y का अनुपात

  $$x : y = \frac{x}{y}$$

  यदि x और y के मात्रक एक ही हैं।

- दो अनुपात यदि समान हों, तो वे एक समानुपात बनाते हैं, जैसे–

  $x : y = a : b$ एक समानुपात है।

- $x : y = a : b$ में

  x तथा b को सिरों के पद और y तथा a को मध्य पद कहते हैं। यदि समानुपात में मध्य पद समान हो जाएं, तो इन दोनों को मध्य समानुपाती कहते हैं।

  जैसे–$x : y = y : b$ में

  x तथा b का मध्य समानुपाती y है।

- यदि एक राशि की वृद्धि (अथवा कमी) से दूसरी में उसी अनुपात में वृद्धि (अथवा कमी) होती है, तो इन्हें अनुक्रम समानुपाती कहते हैं। इस स्थिति में यदि दो राशियां x तथा y अनुक्रम समानुपाती हैं, तो

$$x : y = \frac{x}{y} = k \text{ अथवा } x = ky$$

- यदि एक राशि की वृद्धि (अथवा कमी) से दूसरी में उसी अनुपात में कमी (अथवा वृद्धि) होती है, तो इन्हें व्युत्क्रम समानुपाती कहते हैं। ऐसी स्थिति में यदि दो राशियां x तथा y व्युत्क्रम समानुपाती हैं, तो

$$xy = k \text{ अथवा } x = \frac{k}{y}$$

- समानुपात का प्रयोग न करके प्रश्नों को ऐकिक नियम द्वारा भी कर सकते हैं।

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित में अनुपात ज्ञात कीजिए:

    (i) 16 तथा 72 (ii) 2.5 तथा 7.5

    (iii) 1/2 तथा 3/4 (iv) ₹ $8\frac{1}{2}$ तथा ₹ 34

    (v) 15 सेमी तथा 1.5 मीटर (vi) 10 लीटर तथा 78 लीटर

    (vii) 9.5 तथा 7.6 (viii) 0.64 तथा 0.096

    (ix) 134 मीटर तथा 201 मीटर (x) 27 पैसे तथा ₹ 1.08

2. किसी कक्षा में 60 विद्यार्थियों में से 35 लड़के तथा शेष लड़कियां हैं। निम्न अनुपात ज्ञात कीजिए:

    (i) लड़कों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से

    (ii) लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से

    (iii) लड़कियों का लड़कों की संख्या से

3. एक व्यक्ति 10 किलोमीटर की दूरी $2\frac{1}{2}$ घंटे में तथा दूसरा व्यक्ति 15 किलोमीटर की दूरी 4 घंटे में तय करता है। दोनों व्यक्तियों की औसत चालों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं?

   (i) $9 : 7 = 63 : 49$

   (ii) $\frac{15}{2} : \frac{7}{4} = 15$ किलोग्राम : $3\frac{1}{2}$ किलोग्राम

   (iii) $5.75 : 23 = 8 : 40$

   (iv) $8 : 9 = 4 : 5$

   (v) $15 : 4\frac{1}{2} = 5 : 2$

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए x का मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $15 : 13 = 1.95 : x$

   (ii) $2 : 3 = 2\frac{1}{2} : x$

   (iii) $0.15 : 7.5 = 8$ सेमी : x सेमी

   (iv) $8 : 25 = 4 : x$

   (v) $15 : 10 = 3 : x$

6. निम्नलिखित संख्याओं से एक समानुपात बनाइए:

   (i) 13, 18, 90, 65

   (ii) 5, 12, 15, 4

   (iii) 12, 9, $13\frac{1}{2}$,18

7. 3 दर्जन कॉपियों का मूल्य ₹ 180 है। उसी तरह की 10 दर्जन कॉपियों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

8. 30 किलोग्राम चावल की बोरी का मूल्य ₹ 960 है। एक क्विंटल (100 किलोग्राम) चावल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

9. 80 किलोमीटर स्कूटर चलाने में $2\frac{1}{2}$ लीटर पेट्रोल लगता है। 128 किलोमीटर की दूरी जाने में कितना पेट्रोल लगेगा?

10. यदि 75 व्यक्ति एक काम को 3 दिन में कर सकते हैं, तो 15 व्यक्ति उस काम को कितने दिनों में करेंगे?

टिप्पणी

11. यदि 3 पुस्तकों का मूल्य ₹ 180 तथा 4 कॉपियों का मूल्य ₹ 84 है, तो वैसी एक दर्जन पुस्तकों तथा 6 कॉपियों का कुल मूल्य ज्ञात कीजिए।
12. 15 किलोग्राम सेब की पेटी का मूल्य ₹ 930 है। 5 किलोग्राम सेब का मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि लकड़ी की पेटी का मूल्य ₹ 30 है।
13. A, B तथा C एक काम को क्रमश 6, 8 तथा 12 दिन में कर सकते हैं। उस काम को मिलकर ₹ 10400 में लेने पर प्रत्येक को कितनी राशि मिलेगी?
14. केवलराम तथा मलिक ने एक काम को करने का ठेका ₹ 2700 में लिया। यदि उनकी कार्यक्षमताओं में 8:7 का अनुपात हो, तो ठेके की राशि में दोनों का अलग-अलग भाग ज्ञात कीजिए।
15. A तथा B एक काम को क्रमशः 12 तथा 18 दिन में कर सकते हैं। दोनों ने मिलकर काम प्रारंभ किया। B काम समाप्त होने से 8 दिन पहले चला गया तथा शेष काम अकेले A ने किया। कुल कार्य कितने दिनों में समाप्त हुआ?
16. कला तथा विमला एक ही समय अपने घरों से, जिनके बीच की दूरी 2 किलोमीटर है, एक-दूसरे की ओर चलती हैं। कला की गति 4 किलोमीटर प्रति घंटा तथा विमला की गति 6 किलोमीटर प्रति घंटा है। चलने के कितने समय बाद वे एक-दूसरे से मिलेंगी?
17. एक मालगाड़ी तथा एक कार दो अलग-अलग शहरों, जिनके बीच की दूरी 160 किलोमीटर है, से एक-दूसरे की ओर चलीं। मालगाड़ी की गति 48 किलोमीटर प्रति घंटा तथा कार की गति 72 किलोमीटर प्रति घंटा है। कितनी देर बाद और कहां, वे एक-दूसरे से मिलेंगी?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 7.1

1. (i) 1 : 21 (ii) 1 : 3 (iii) 1 : 10 (iv) 1 : 300 (v) 6 : 1
2. 3 : 5
3. 11 : 14
4. (i) 5 : 4 (ii) 5 : 1 (iii) 1 : 4
5. (i) 2 : 1 (ii) 1 : 1

देखें आपने कितना सीखा 7.2

1. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य
2. (i) 54 (ii) 21 (iii) 18
3. (i) 4 (ii) 8 (iii) 36 (iv) 25

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 7.3

1. 6.75 किलोग्राम 2. ₹ 1400 3. 10 दिन 4. 15 दिन

5. 25 दिन 6. 15 मीटर 7. ₹ 2400 8. 4 दिन

देखें आपने कितना सीखा 7.4

1. ₹ 3000 2. ₹ 210 3. ₹ 204

4. ₹ 360 5. 15 दिन 6. 20 व्यक्ति

देखें आपने कितना सीखा 7.5

1. 6 दिन 2. 4 दिन 3. 120 दिन

4. 72 दिन 5. A : 12 दिन, B : 24 दिन 6. 9 दिन

देखें आपने कितना सीखा 7.6

1. 300 मीटर 2. कार 12 किलोमीटर प्रति घंटा अधिक गति से

3. 9 सेकेंड 4. 60 किलोमीटर प्रति घंटा

5. 24 सेकेंड 6. 72 किलोमीटर प्रति घंटा

7. 7 मिनट, 12 सेकेंड

आइए अभ्यास करें

1. (i) 2 : 9 (ii) 1 : 3 (iii) 2 : 3 (iv) 1 : 4 (v) 1 : 10

   (vi) 5 : 39 (vii) 5 : 4 (viii) 20 : 3 (ix) 2 : 3 (x) 1 : 4

2. (i) 7 : 12 (ii) 5 : 12 (iii) 5 : 7

3. 16 : 15

4. सत्य कथन (i), (ii)

5. (i) 1.69 (ii) $\frac{15}{4}$ (iii) 400

   (iv) $\frac{25}{2}$ (v) 2

6. (i) 13 : 65 :: 18 : 90 (ii) 5 : 15 :: 4 : 12

   (iii) $9 : 13\frac{1}{2} :: 12 : 18$

7. ₹ 600

8. ₹ 3200

9. 4 लीटर

10. 15 दिन

11. ₹ 846

12. ₹ 300

13. A : ₹ 2400, B : ₹ 3200, C : ₹ 4800

14. केवलराम : ₹ 1440, मलिक : ₹ 1260

15. 12 दिन

16. 12 मिनट

17. चलने के 1 घंटा 20 मिनट बाद जब रेलगाड़ी 64 किलोमीटर तथा कार 96 किलोमीटर चल चुकी होंगी।

8

प्रतिशतता तथा उसके अनुप्रयोग

आप भिन्नों से परिचित हो चुके हैं। उदाहरण के लिए, $\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{32}{35}$, ...इत्यादि भिन्नें हैं। आपने यह भी सीखा है कि दो भिन्नों की तुलना के लिए, उन्हें इस प्रकार की तुल्य भिन्नों के रूप में लिखते हैं कि उनके हर समान हो जाएं। एक भिन्न, जिनका हर 100 हो, प्रतिशत भी कहलाती हैं।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- प्रतिशत को भिन्न के रूप में लिखना
- किसी भिन्न को प्रतिशत रूप में लिखना
- प्रतिशतता पर आधारित प्रश्नों को हल करना
- प्रतिशतता के प्रयोग से लाभ और हानि के प्रश्नों को हल करना
- प्रतिशतता के आधार पर बट्टे के प्रश्नों को हल करना

8.1 प्रतिशत का भिन्न रूप

आइए सीखें कि किसी भिन्न को प्रतिशत के रूप में कैसे लिखते हैं और किसी प्रतिशत को कैसे भिन्न के रूप में व्यक्त करते हैं। समझने के लिए निम्नलिखित उदाहरण लीजिए:

उदाहरण 8.1 : $\frac{3}{8}$ तथा $\frac{2}{7}$ की तुलना कीजिए।

हल : हमें $\frac{3}{8}$ तथा $\frac{2}{7}$ को ऐसी तुल्य भिन्नों के रूप में लिखना है, जिनके हर दी गई भिन्नों के हरों का ल. स. (LCM) हो।

8 तथा 7 का लघुतम समापवर्त्य 56 है।

अत: $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{21}{56}$

$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 8}{7 \times 8} = \frac{16}{56}$

क्योंकि $\frac{21}{56} > \frac{16}{56}$

अत: $\frac{3}{8} > \frac{2}{7}$

उदाहरण 8.2 : $\frac{9}{10}$ तथा $\frac{41}{50}$ की तुलना कीजिए।

हल : भिन्नें $\frac{9}{10}$ तथा $\frac{41}{50}$ हैं।

$$\frac{9}{10} = \frac{9}{10} \times \frac{10}{10} = \frac{90}{100} \quad \text{तथा} \quad \frac{41}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{82}{100}$$

अत: $\frac{9}{10} > \frac{41}{50}$ क्योंकि $\frac{90}{100} > \frac{82}{100}$

दूसरी बार हमने जानबूझकर भिन्नों के हर को 100 लिया है (वह 50 भी लिया जा सकता था) वे भिन्नें, जिनका हर 100 होता है, प्रतिशत कहलाती हैं।

अत: $\frac{90}{100}$ को 90% या 90 प्रतिशत तथा $\frac{82}{100}$ को 82 प्रतिशत अथवा 82% लिखते हैं।

8.1.1 भिन्नों को प्रतिशत रूप में बदलना

आपने ऊपर पढ़ा है कि

$$\frac{90}{100} = 90\%$$

हम 90% को $90 \times \frac{1}{100}$ के रूप में लिखकर $\frac{1}{100}$ को % में बदल देते हैं।

अत: $90 \times \frac{1}{100} = 90\%$

टिप्पणी

इसी प्रकार $\frac{82}{100} = 82 \times \frac{1}{100} = 82\%$

इस प्रकार हमने सीखा कि किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए उसके हर को 100 में बदलें (अंश तथा हर को ऐसी संख्या से गुणा करें कि हर 100 में बदल जाए) और फिर भिन्न के हर को हटाकर अंश के साथ % का चिन्ह लगा दें।

आइए नीचे उदाहरण देखें।

उदाहरण 8.3 : निम्नलिखित में से प्रत्येक भिन्न को प्रतिशत के रूप में बदलिए:

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $1\frac{7}{15}$ (iii) 0.7

हलः (i) $\frac{3}{5} = \frac{3\times 20}{5\times 20}$

$= \frac{60}{100} = 60\times\frac{1}{100}$

$= 60\%$

(ii) $1\frac{7}{15} = \frac{22\times 20}{15\times 20} = \frac{22\times 20}{3}\times\frac{1}{100} = \frac{440}{3}\times\frac{1}{100}$

$= \frac{440}{3}\%$ अथवा $146\frac{2}{3}\%$

(iii) $0.7 = \frac{7}{10}$

$= \frac{7\times 10}{10\times 10}$

$= \frac{70}{100} = 70\times\frac{1}{100} = 70\%$

उदाहरण 8.4 : निम्नलिखित प्रतिशतों को भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 45% (ii) $16\frac{2}{3}\%$ (iii) 11.5%

टिप्पणी

हल: (i) 45%

$$= 45 \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{45}{100}$$

$$= \frac{9}{20} \quad \text{(अंश तथा हर को 5 से भाग देने पर)}$$

(ii) $16\frac{2}{3}\% = \frac{50}{3}\%$

$$= \frac{50}{3} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{6}$$

(iii) 11.5%

$$= \frac{23}{2}\%$$

$$= \frac{23}{2} \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{23}{200}$$

उदाहरण 8.5 : (i) 200 का 160 कितने प्रतिशत है?

(ii) 25 किलोग्राम का 3.5 किलोग्राम कितने प्रतिशत है?

हल : (i) वांछित प्रतिशत $= \left(\frac{160}{200} \times 100\right)\%$

$$= 80\%$$

(ii) वांछित प्रतिशत $= \left(\frac{3.5}{25} \times 100\right)\%$

$$= 14\%$$

देखें आपने कितना सीखा 8.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक भिन्न को प्रतिशत के रूप में लिखिए:

   (i) $\frac{15}{20}$ (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) 0.68 (iv) $1\frac{1}{4}$ (v) $\frac{3}{25}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक प्रतिशत को निम्नतम रूप वाली भिन्न के रूप में लिखिए:

   (i) 15% (ii) $66\frac{2}{3}\%$ (iii) $13\frac{1}{3}\%$ (iv) 35% (v) $23\frac{3}{4}\%$

3. (i) 180 का कितने प्रतिशत 90 है?

   (ii) 75 रुपये का कितना प्रतिशत ₹ 45 है?

   (iii) 15 लीटर, 50 लीटर का कितना प्रतिशत है?

8.2 किसी राशि का कुछ निश्चित प्रतिशत ज्ञात करना

आइए कुछ उदाहरण लेकर स्पष्ट करें कि किसी राशि का दिया गया प्रतिशत कैसे निकालते हैं।

उदाहरण 8.6 : (i) ₹ 1500 का 15% ज्ञात कीजिए

(ii) 250 किलोग्राम का 45% ज्ञात कीजिए

हल : (i) 1500 रुपये का 15%

$$= \left(1500 \times 15 \times \frac{1}{100}\right)$$

$$= ₹\ 225$$

(ii) 250 किलोग्राम का 45%

$$= \left(250 \times 45 \times \frac{1}{100}\right) \text{ किलोग्राम}$$

$$= \frac{225}{2} \text{ किलोग्राम}$$

$$= 112\frac{1}{2} \text{ किलोग्राम}$$

उदाहरण 8.7 : यदि किसी रेखाखंड की लंबाई का 25%, 6 मीटर है तो रेखाखंड की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना वांछित लंबाई x है।

$\therefore$ x का 25% = 6

या x = 24

अत: वांछित लंबाई 24 मीटर है।

देखें आपने कितना सीखा 8.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

   (i) 25 लीटर का 26% (ii) 40 किलोग्राम का 75%

   (iii) ₹ 1900 का 20%

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में x का मान ज्ञात कीजिए:

   (i) x का 16%, 260 है

   (ii) x का 1.5%, ₹ 108 है

   (iii) x का 90%, 216 किलोमीटर है

8.2.1 प्रतिशत से संबंधित कुछ शाब्दिक प्रश्न

उदाहरण 8.8 : एक बाग में 1300 पेड़ हैं। इनमें से 26% पेड़ अमरूद के हैं, बाग में अन्य प्रकार के पेड़ों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : बाग में पेड़ों की कुल संख्या = 1300

बाग में अमरूद के पेड़ों की संख्या $= \left(\dfrac{1300 \times 26}{100}\right)$

$= 338$

बाग में अन्य पेड़ों की संख्या $= (1300 - 338)$

$= 962$

उदाहरण 8.9 : एक व्यक्ति की मासिक आय ₹ 16000 है और वह इसमें से 12000 खर्च कर देता है। वह व्यक्ति अपनी आय का कितना प्रतिशत बचाता है?

हल : बचत की राशि = आय − खर्च

$= ₹\ 16000 - 12000$

$= ₹\ 4000$

बचत, कुल आय का भिन्न के रूप में प्रतिशत

$$= \left(\frac{4000}{16000} \times 100\right)\%$$

$= 25\%$

उदाहरण 8.10 : वह राशि ज्ञात कीजिए, जिसमें 10% वृद्धि करने पर वह ₹ 1331 हो जाती है।

हल : माना वांछित राशि = ₹ x

अतः $x + (x$ का $10\%)$

$$= x + \frac{x}{10} = \frac{11x}{10}$$

दिया है कि $\frac{11x}{10} = 1331$

अतः $x = \frac{1331 \times 10}{11}$

$= ₹\ 1210$

अतः वांछित राशि = ₹ 1210

उदाहरण 8.11 : किसी विशेष वर्ष में एक विद्यालय की प्रवेश में 15% बढ़ोत्तरी हो जाती है। यदि प्रारंभ में उस विद्यालय में 1500 विद्यार्थी थे, तो प्रवेश के बाद विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : प्रारंभ में विद्यार्थियों की संख्या = 1500

बढ़ोत्तरी = 1500 का 15%

$$= \frac{15}{100} \times 1500$$

$= 225$

अतः प्रवेश के बाद विद्यार्थियों की संख्या $= 1500 + 225$

$= 1725$

देखें आपने कितना सीखा 8.3

1. सुनीता ने एक परीक्षा में, जिसके अधिकतम अंक 800 थे, 76% अंक प्राप्त किए। सुनीता द्वारा प्राप्त अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

2. किसी कर्मचारी को कंपनी से बोनस के रूप में ₹ 15000 प्राप्त हुए। यदि बोनस वार्षिक वेतन का 20% हो, तो उस कर्मचारी का वार्षिक वेतन ज्ञात कीजिए।

3. एक संख्या का 60%, 48 है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

4. एक परीक्षा में रीना ने कुछ अंक प्राप्त किए। इसी परीक्षा में सीमा ने रीना से 20% अधिक अंक प्राप्त किए। यदि इस परीक्षा में अधिकतम अंक 600 थे, तो प्रत्येक द्वारा प्राप्तांक ज्ञात कीजिए, यदि दोनों द्वारा प्राप्त अंकों का योग 720 है।

8.3 लाभ और हानि

हम प्रतिदिन बाजार से वस्तुएं खरीदते हैं। अधिकतर हम यह वस्तुएं घर के पास के फुटकर विक्रेता से लेते हैं। फुटकर विक्रेता यह सामान एक थोक विक्रेता को पैसे देकर लेता है। वह मूल्य फुटकर विक्रेता का क्रय मूल्य (Cost Price) कहलाता है। फुटकर विक्रेता, जिस दाम पर वस्तु को ग्राहक को बेचता है, उसे उस वस्तु का विक्रय मूल्य (Selling Price) कहते हैं।

यह स्पष्ट है कि यदि विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से अधिक है तो विक्रेता को लाभ होता है, अन्यथा उसे हानि होती है।

अत: लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

कभी-कभी फुटकर विक्रेता को सामान लाने ले जाने, दुकान का किराया तथा कर्मचारियों के वेतन इत्यादि पर भी व्यय करना पड़ता है। इन सब व्ययों को उपरिव्यय (Overhead Charges) कहते हैं तथा फुटकर विक्रेता इन्हें भी क्रय मूल्य में सम्मिलित करता है। उदाहरण के लिए, यदि एक टेलीविजन का मूल्य ₹ 16000 है तथा ₹ 100 उसके दुकान तक लाने में खर्च हुए हों तो टेलीविजन का वास्तविक क्रय मूल्य ₹ 16100 है। जब तक अलग से न कहा जाए, हम यह मानकर चलेंगे कि उपरिव्यय क्रय मूल्य में सम्मिलित है।

प्रतिशत लाभ या हानि

ध्यान रखिए कि प्रतिशत लाभ अथवा हानि सदा क्रय मूल्य पर ही परिकलित किया जाता है। आइए, इसके लिए कुछ उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 8.12 : एक दुकानदार ने एक वस्तु ₹ 1400 में खरीदकर ₹ 1512 में बेची। उस दुकानदार का प्रतिशत लाभ ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

हल : यहां क्रय मूल्य = ₹ 1400

विक्रय मूल्य = ₹ 1512

अत: लाभ = ₹ (1512 – 1400) = ₹ 112

अत: ₹ 1400 पर लाभ = ₹ 112

$\therefore$ ₹ 100 पर लाभ = $\frac{112}{1400}\times 100$

= ₹ 8

अत: प्रतिशत लाभ = 8%

अत: प्रतिशत लाभ = $\left(\frac{\text{कुल लाभ}\times 100}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\%$

तथा प्रतिशत हानि = $\left(\frac{\text{कुल हानि}\times 100}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\%$

देखें आपने कितना सीखा 8.4

1. निम्नलिखित प्रश्नों में प्रतिशत लाभ अथवा हानि ज्ञात कीजिए:

वि.मू.	क्र.मू.	उपरिव्यय
(i) ₹ 550	₹ 450	–
(ii) ₹ 1440	₹ 1500	–
(iii) ₹ 300	₹ 225	₹ 25
(iv) ₹ 210	₹ 190	₹ 10
(v) ₹ 190	₹ 180	₹ 20

2. रमेश ने ₹ 3000 में एक मेज लेकर उसे ₹ 2950 में बेच दिया। उसका प्रतिशत लाभ अथवा हानि ज्ञात कीजिए।

3. कामिनी ने एक साइकिल ₹ 1500 में खरीदकर उसे ₹ 1800 बेचा। उसका प्रतिशत लाभ अथवा हानि ज्ञात कीजिए।

4. अहमद ने एक मोटर साइकिल ₹ 12000 में खरीदी। उसने उसकी मरम्मत पर ₹ 1300 खर्चे तथा उसे ₹ 19000 में बेच दिया। अहमद का लाभ अथवा हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

5. अहमद ₹ 30 प्रति दर्जन के भाव से संतरे खरीदकर उन्हें ₹ 40 प्रति दर्जन के भाव से बेचता है। संतरों की बिक्री में लाभ अथवा हानि % ज्ञात कीजिए।

वि.मू., क्र.मू. अथवा हानि प्रतिशत में से कोई दो दिए हों, तो तीसरा ज्ञात किया जा सकता है। आइए, उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें।

उदाहरण 8.13 : एक घोड़ा, जिसका क्रय मूल्य ₹ 135000 है, 10% के लाभ पर बेचा गया। घोड़ा किस मूल्य पर बेचा गया?

हल : घोड़े का क्रय मूल्य = ₹ 135000

लाभ प्रतिशत = 10

$$\text{विक्रय मूल्य} = ₹ \left[\frac{1,35,000 \times (100+10)}{100}\right]$$

$$= ₹\ 148500$$

उदाहरण 8.14 : एक घड़ी को ₹ 3290 में बेचने पर एक व्यक्ति 6% हानि उठाता है। घड़ी का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : विक्रय मूल्य = ₹ 3290, हानि = 6%

$$\text{विक्रय मूल्य} = ₹\ \frac{\text{क्रय मूल्य} \times (100-6)}{100}$$

$$\therefore \quad 3290 = \frac{\text{क्रय मूल्य} \times 94}{100}$$

$$\therefore \quad \text{क्रय मूल्य} = ₹ \left[\frac{3290 \times 100}{94}\right]$$

$$= ₹\ 3500$$

देखें आपने कितना सीखा 8.5

1. निम्न प्रश्नों में अज्ञात राशि x ज्ञात कीजिए:

	वि.मू.	क्र.मू.	हानि%	लाभ%
(i)	x	₹ 650	5	–
(ii)	₹ 243	x	–	$12\frac{1}{2}\%$

(iii) x	₹ 500	–	5%
(iv) ₹ 250	x	$16\frac{2}{3}\%$	–
(v) x	₹ 40	–	15%

2. एक मेज 4% हानि पर ₹ 1920 में बेची गई। मेज का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

3. एक दुकानदार एक वस्तु को ₹ 910 में बेचकर 40% लाभ कमाता है। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

4. सुरेश ने एक हल ₹ 550 में खरीदकर उसकी मरम्मत पर ₹ 250 व्यय किए। फिर उस हल को $12\frac{1}{2}\%$ लाभ पर बेच दिया। हल का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

कुछ अन्य उदाहरण

उदाहरण 8.15 : यदि y से x, 20% अधिक है तो बताइए y, x से कितने प्रतिशत कम है?

हल : माना y का मान 100 है।

तो x का मान 120 है

यदि x, 120 है तो y = 100

यदि x, 100 है तो $y = \frac{100}{120} \times 100 = \frac{250}{3} = 83\frac{1}{3}$

अतः y, x से $\left(100 - 83\frac{1}{3}\right)$ % अर्थात् $16\frac{2}{3}\%$ कम है।

उदाहरण 8.16 : अली ने एक परीक्षा में 62% अंक प्राप्त करके 434 अंक प्राप्त किए। उसी परीक्षा में राम ने 350 अंक प्राप्त किए। राम द्वारा प्राप्त अंकों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

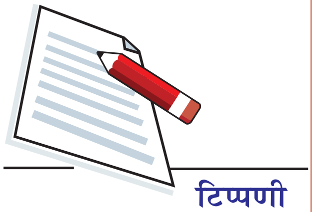
हल : हमें पहले अधिकतम अंक ज्ञात करने है

माना अधिकतम अंक x हैं

अतः x का 62% = 434

अर्थात् $\frac{62}{100} \times x = 434$

अतः $x = \frac{434 \times 100}{62} = 700$



टिप्पणी

राम द्वारा प्राप्तांक = 350

अतः राम द्वारा प्राप्त प्रतिशत अंक = $\left(\frac{350}{700}\times 100\right)\%$

अतः राम को परीक्षा में 50% अंक मिले।

उदाहरण 8.17 : एक व्यक्ति ने ₹ 48 प्रति दर्जन की दर से अंडे खरीदे। वह उन्हें प्रति सैकड़ा किस दर से बेचे कि उसे 15% लाभ हो।

हल : 12 अंडों का क्रय मूल्य = ₹ 48

100 अंडों का क्रय मूल्य = ₹ $\left(\frac{48}{12}\times 100\right)$

= ₹ 400

लाभ = 15%

अतः 100 अंडों का लाभ = ₹ $\left(\frac{15}{100}\times 400\right)$ = ₹ 60

अतः 100 अंडों का विक्रय मूल्य = (400 + 60) अर्थात् ₹ 460

उदाहरण 8.18 : रामकुमार ने दत्त को 8% लाभ पर एक रेडियो बेचा। दत्त ने उसकी मरम्मत पर ₹ 58 व्यय किए और उसे सीमा को ₹ 836 में बेच दिया। उस सौदे में दत्त को 10% लाभ हुआ। रामकुमार को वह रेडियो कितने मूल्य में प्राप्त हुआ था?

हल : दत्त का विक्रय मूल्य = ₹ 836

लाभ = 10%

दत्त का कुल क्रय मूल्य = ₹ $\frac{836\times 100}{(100+10)}$ = ₹ 760

इसमें ₹ 58 मरम्मत के शामिल हैं।

दत्त का शुद्ध क्रय मूल्य = रामकुमार का वि.मू. = ₹ (760 − 58) = ₹ 702

अतः रामकुमार का क्र.मू. = ₹ $\left(\frac{702\times 100}{108}\right)$ = ₹ 650

अतः रामकुमार का क्रय मूल्य ₹ 650 था।

देखें आपने कितना सीखा 8.6

1. यदि A का मान B के मान से 20% कम है तो B का मान A के मान से कितने प्रतिशत अधिक है?

2. चावल के मूल्य में 10% कमी आने पर एक व्यक्ति ₹ 1400 में 10 किलोग्राम अधिक चावल खरीद सकता है। चावल का मूलभाव तथा घटा हुआ मूल्य प्रति किलोग्राम ज्ञात कीजिए।

3. रमा ने एक परीक्षा में 34 प्रतिशत अंक लिए। उसके 204 अंक आए। यदि सोफिया के उसी परीक्षा में 312 अंक आए हों, तो उसके द्वारा प्राप्तांकों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

4. एक व्यक्ति ने ₹ 72 प्रति दर्जन के भाव से संतरे खरीदे। वह उन्हें प्रति सैकड़ा किस भाव से बेचे कि उसे 20% लाभ हो?

5. अली ने एक कार अहमद को ₹ 2,50,000 में बेची। अहमद ने उस कार की मरम्मत पर ₹ 50,000 व्यय किए तथा फिर उसे 8% लाभ पर बेचा। कार का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

8.4 बट्टा (Discount)

बिक्री को बढ़ाने अथवा पुराने माल को निकालने के लिए ऐसी खबरें छापी जाती हैं 'मूल्यों में 30% कमी', 'विशेष सेल 20% छूट'। ऐसे माल को विशेष काउंटर बनाकर कम मूल्य पर बेचा जाता है। वह मूल्य, जो वस्तु पर लिखा हो (या था) को, उसका अंकित मूल्य कहा जाता है तथा दी गई कटौती को बट्टा। ग्राहक द्वारा वस्तु के लिए दी गई राशि को वस्तु का विक्रय मूल्य कहते हैं।

बट्टा प्रायः अंकित मूल्य का प्रतिशत होता है।

आइए, कुछ उदाहरण लेकर इसे स्पष्ट करें।

उदाहरण 8.19 : एक व्यापारी अपने बनाए गए कंबलों पर 15% छूट देता है। यदि एक कंबल का अंकित मूल्य ₹ 1200 हो, तो ग्राहक को कंबल कितने का मिलेगा?

हल : अंकित मूल्य = ₹ 1200

छूट = 15%

$\therefore$ 1200 रुपये पर छूट = ₹ $\left(1200 \times \frac{15}{100}\right)$

= ₹ 180

अतः ग्राहक को कंबल की खरीद के लिए ₹ (1200 – 180) अर्थात् ₹ 1020 देने पड़ेंगे।

उदाहरण 8.20 : एक जोड़ी जूतों का अंकित मूल्य ₹ 1150 है तथा सेल में वह ₹ 950 में बेचा जाता है। जूतों के जोड़े पर दिए गए बट्टे की दर ज्ञात कीजिए।

हल : अंकित मूल्य = ₹ 1150

विक्रय मूल्य = ₹ 950

बट्टा = ₹ (1150 – 950) = ₹ 200

$$\text{बट्टे का प्रतिशत} = \left(\frac{200}{1150}\times 100\right)\%$$

$$= 17.4\% \text{ लगभग}$$

देखें आपने कितना सीखा 8.7

1. निम्नलिखित के लिए बट्टा ज्ञात कीजिए:

	अंकित मूल्य	छूट%
(i)	₹ 54	10
(ii)	₹ 480	6
(iii)	₹ 350	8
(iv)	₹ 150	10
(v)	₹ 160	5

2. एक पंखे पर, जिसका अंकित मूल्य ₹ 2000 है, 15% की छूट है। पंखे का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित प्रश्नों के लिए बट्टा प्रतिशत ज्ञात कीजिए:

	अंकित मूल्य	वि. मूल्य
(i)	₹ 65.00	₹ 50.00
(ii)	₹ 80.00	₹ 65.00
(iii)	₹ 120.00	₹ 105

आइए दोहराएं

- प्रतिशत वह भिन्न है, जिसका हर 100 है।
- लाभ अथवा हानि प्रतिशत सदा क्रय मूल्य पर ज्ञात किए जाते हैं।

- विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य = लाभ

  क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य = हानि

- क्रय मूल्य $= \dfrac{\text{विक्रय मूल्य} \times 100}{(100 + \text{लाभ}\%)}$ या $\dfrac{\text{विक्रय मूल्य} \times 100}{(100 - \text{हानि}\%)}$

- विक्रय मूल्य $= \dfrac{\text{क्रय मूल्य} \times (100 + \text{लाभ}\%)}{100}$ या $\dfrac{\text{क्रय मूल्य} \times (100 - \text{हानि}\%)}{100}$

- बट्टा किसी वस्तु के अंकित मूल्य पर प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित को प्रतिशत के रूप में लिखिए:

   (i) $\dfrac{7}{10}$ (ii) $\dfrac{2}{25}$

   (iii) 0.75 (iv) 0.28 (v) 2.8

2. निम्नलिखित प्रश्नों में प्रतिशत को भिन्न के निम्नतम रूप में लिखिए:

   (i) 12% (ii) 8.2% (iii) 32% (iv) 0.9%

3. (a) निम्न का मान ज्ञात कीजिए

   (i) 150 का 5% (ii) 5 लीटर का 18%

   (iii) 12 किलोग्राम का 40% (iv) 8 से.मीटर का 40%

   (b) (i) 96, 150 का कितने प्रतिशत है?

   (ii) 14, 40 का कितने प्रतिशत है?

4. x का मान ज्ञात कीजिए:

   (i) x का 12% = 135

   (ii) x का 80% = 26 लीटर

   (iii) 8x का 4% = 36

टिप्पणी

5. निम्नलिखित में x का मान ज्ञात कीजिए:

क्र.मू.	वि.मू.	लाभ%	हानि%	उपरिव्यय
(i) ₹ 400	₹ 450	x	—	—
(ii) ₹ 400	x	40%	—	—
(iii) ₹ 150	x	—	20%	—
(iv) x	₹ 440	10%	—	₹ 50
(v) ₹ 900	x	—	10%	—

6. सुनीता ने एक परीक्षा में 70% अंक प्राप्त किए। यदि अधिकतम अंक 800 थे, तो सुनीता द्वारा प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

7. गणित के एक प्रश्न पत्र में अरुणा ने 80 में से 60 अंक प्राप्त किए। उसके प्राप्तांकों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

8. एक साइकिल ₹ 2400 में खरीदकर 10% हानि पर बेचें, तो साइकिल का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

9. 3 वस्तुएं, 4 वस्तुओं के अंकित मूल्य पर बेची जाती हैं। प्रतिशत लाभ ज्ञात कीजिए।

10. एक वस्तु का अंकित मूल्य ₹ 1600 है। दुकानदार उस पर 20% की छूट देता है। ग्राहक द्वारा खरीदने पर यह वस्तु कितने की मिलेगी?

11. एक वस्तु का मूल्य 10% छूट मिलने के पश्चात् ₹ 1800 है। वस्तु का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

12. 35% छूट मिलने पर एक वस्तु का मूल्य उतना हो जाता है, जितना दूसरी वस्तु का ₹ 1300 पर 10% छूट मिलने पर होता है। पहली वस्तु का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

13. एक व्यक्ति ने कुछ संतरे ₹ 10 के 3 तथा उतने ही संतरे ₹ 10 के 2 के भाव से खरीदे। सभी संतरों को चार रुपया प्रति संतरा के भाव से बेचने से प्रतिशत लाभ अथवा हानि ज्ञात कीजिए।

14. एक व्यक्ति एक वस्तु पर क्रय मूल्य से 30% अधिक मूल्य अंकित करता है, लेकिन अंकित मूल्य पर 20% छूट देता है। उसका प्रतिशत लाभ अथवा हानि ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 8.1

1. (i) 75% (ii) $83\frac{1}{3}\%$ (iii) 68% (iv) 125% (v) 12%

2. (i) $\frac{3}{20}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{2}{15}$ (iv) $\frac{7}{20}$ (v) $\frac{19}{80}$

3. (i) 50% (ii) 60% (iii) 30%

देखें आपने कितना सीखा 8.2

1. (i) 6.5 लीटर (ii) 30 किलोग्राम (iii) ₹ 380

2. (i) 1625 (ii) ₹ 7200 (iii) 240 किलोमीटर

देखें आपने कितना सीखा 8.3

1. 608 2. ₹ 75000 3. 80

4. 300, 420

देखें आपने कितना सीखा 8.4

1. (i) $22\frac{2}{9}\%$ लाभ (ii) 4% हानि (iii) 20% लाभ

   (iv) 5% लाभ (v) 5% हानि

2. $1\frac{2}{3}\%$ हानि

3. 20% लाभ

4. $42\frac{6}{7}\%$ लाभ

5. $33\frac{1}{3}\%$ लाभ

देखें आपने कितना सीखा 8.5

1. (i) ₹ 617.50 (ii) ₹ 216 (iii) ₹ 525

   (iv) ₹ 300 (v) ₹ 46

2. ₹ 2000 3. ₹ 650 4. ₹ 900

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 8.6

1. 25% 2. ₹ $17\frac{7}{9}$, 14 3. 52%

4. ₹ 720 5. 3,24,000

देखें आपने कितना सीखा 8.7

1. (i) ₹ 5.40 (ii) ₹ 28.80 (iii) ₹ 28 (iv) ₹ 15 (v) ₹ 8

2. ₹ 1700

3. (i) $23\frac{1}{13}\%$ (ii) $18\frac{3}{4}\%$ (iii) $12\frac{1}{2}\%$

आइए अभ्यास करें

1. (i) 70% (ii) 8% (iii) 75% (iv) 28% (v) 280%

2. (i) $\frac{3}{25}$ (ii) $\frac{41}{500}$ (iii) $\frac{8}{25}$ (iv) $\frac{9}{1000}$

3. (a) (i) 7.5 (ii) $\frac{9}{10}$ लीटर (iii) 4.8 किलोग्राम (iv) 3.2 से.मीटर

   (b) (i) 64% (ii) 35%

4. (i) 1125 (ii) 32.5 लीटर (iii) $\frac{900}{8}$

5. (i) $12\frac{1}{2}\%$ (ii) ₹ 560 (iii) ₹ 120 (iv) ₹ 350 (v) ₹ 810

6. 560 7. 75% 8. 2160 9. $33\frac{1}{3}\%$

10. ₹ 1280 11. ₹ 2000 12. ₹ 1800

13. 4% हानि 14. 4% लाभ

9

साधारण तथा चक्रवृद्धि ब्याज

जब हम किसी व्यक्ति, बैंक अथवा सहकारी समिति से कुछ निश्चित समय के लिए कुछ धन राशि उधार लेते हैं, तो हम उधार देने वाले व्यक्ति, बैंक अथवा समिति को उस राशि के प्रयोग के लिए उधार ली गई राशि के अतिरिक्त भी कुछ धन राशि वापस देते हैं। वह अतिरिक्त धन राशि ब्याज (Interest) कहलाती है।

ब्याज की गणना करने के लिए हमें ज्ञात होना चाहिए कि कितनी धन राशि किस अवधि के लिए उधार ली गई है।

उधार ली गई धन राशि को मूलधन कहते हैं तथा जिस अवधि के लिए धन उधार लिया जाता है, उसे समय कहते हैं। उधार देने वाले को ब्याज मिलाकर, जो कुल धन राशि वापस की जाती है, वह मिश्रधन कहलाती है।

अत: मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

ब्याज एक निश्चित शर्त के अनुसार, जो प्राय: प्रत्येक वर्ष के मूलधन के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है, लिया जाता है। वह प्रतिशत वार्षिक दर (Rate Per Annum) कहलाती है। ब्याज की दर 10% वार्षिक है, कहने का अर्थ होता है कि ₹ 100 मूलधन पर एक वर्ष का ब्याज ₹ 10 है।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- ब्याज की गणना किस प्रकार की जाती है।
- ब्याज ज्ञात करने के लिए किन-किन बातों अथवा सूचनाओं की जानकारी आवश्यक है।

9.1 साधारण ब्याज

जब लिए गए ऋण की पूरी अवधि में ब्याज केवल प्रारंभिक उधार ली गई राशि पर ही लगता है तो उस ब्याज को साधारण ब्याज कहा जाता है।

साधारण ब्याज ज्ञात करने का सूत्र है :

$$I = Prt$$

जहां I = साधारण ब्याज, P = मूलधन, r = ब्याज की वार्षिक दर प्रतिशत तथा t = समय वर्षों में, जिसके लिए ऋण लिया गया है।

आइए, इस सूत्र पर आधारित कुछ प्रश्न लें। प्रश्न करने से पहले यह जान लें कि चार अज्ञात राशियों में से कोई तीन के मान ज्ञात होने पर चौथे का मान ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 9.1 : एक व्यक्ति ने बैंक से ₹ 1200 का ऋण 10% वार्षिक की दर से 2 वर्ष के साधारण ब्याज पर लिया। ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : यहां P = ₹ 1200, $r = 10\% = \frac{10}{100}$, t = 2 वर्ष

अतः $I = Prt = \left(1200 \times \frac{10}{100} \times 2\right)$

$= ₹\ 240$

इसलिए वह व्यक्ति बैंक को 2 वर्ष का ₹ 240 ब्याज देगा।

उदाहरण 9.2 : 6% वार्षिक की दर से ₹ 1800 पर 219 दिन का साधारण ब्याज ज्ञात करें। मिश्रधन भी ज्ञात कीजिए।

हल : यहां P = ₹ 1800, $r = 6\% = \frac{6}{100}$ तथा t = 219 दिन = $\frac{219}{365}$ वर्ष = $\frac{3}{5}$ वर्ष

इसलिए $\quad I = ₹\left(\frac{1800 \times 6 \times 3}{100 \times 5}\right)$

$= \frac{324}{5}$ अर्थात् ₹ 64.80

अतः मिश्रधन $\quad A = P + I$

$= ₹\ (1800 + 64.80)$

$= ₹\ 1864.80$

उदाहरण 9.3 : मैं एक बैंक में 8% वार्षिक की दर से 2 वर्ष के लिए कितनी राशि जमा करूं कि साधारण ब्याज ₹ 1280 मिले?

हल : यहां P ज्ञात करना है

$r = 8\% = \frac{8}{100}$, t = 2 वर्ष

I = ₹ 1280

अतः $I = Prt$ से हमें प्राप्त होता है

$$1280 = \frac{P \times 8 \times 2}{100}$$

$$\text{अतः } P = ₹\left(\frac{1280 \times 100}{8 \times 2}\right)$$

$$= ₹\ 8000$$

उदाहरण 9.4 : 8% वार्षिक की दर से कितने समय में ₹ 1600 पर साधारण ब्याज ₹ 128 हो जाएगा?

हल : यहां I = ₹ 128, P = ₹ 1600, दर = 8% वार्षिक, समय = ?

$$\text{अतः } 128 = \frac{1600 \times 8 \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{समय} = \frac{128}{128} \text{ वर्ष}$$

$$= 1 \text{ वर्ष}$$

उदाहरण 9.5 : किस प्रतिशत वार्षिक की दर से ₹ 2500 का 4 वर्ष में साधारण ब्याज 500 रुपये हो जाएगा?

हल : यहां P = ₹ 2500, I = ₹ 500, t = 4 वर्ष, r = ?

$$\text{अतः} \quad 500 = \frac{2500 \times 4 \times r}{100}$$

$$r = \frac{500 \times 100}{2500 \times 4} = \frac{100}{20} \text{ अर्थात } \frac{100}{20}\%$$

$$= 5\%$$

अतः प्रतिशत दर = 5%

उदाहरण 9.6 : 8% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से एक दी हुई धनराशि के 3 वर्ष तथा 5 वर्ष के ब्याजों का अंतर ₹ 360 है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

हल : माना राशि ₹ 100 है

$$8\% \text{ से } 3 \text{ वर्ष का ब्याज} = ₹\left(\frac{100 \times 8 \times 3}{100}\right) = ₹\ 24$$

टिप्पणी

8% से 5 वर्ष का ब्याज = ₹ $\left(\frac{100\times8\times5}{100}\right)$ = ₹ 40

अंतर = ₹ (40 – 24)

= ₹ 16

जब अंतर ₹ 16 है तो राशि = ₹ 100

जब अंतर ₹ 1 है तो राशि = ₹ $\frac{100}{16}$

जब अंतर ₹ 360 है तो राशि = ₹ $\left(\frac{100\times360}{16}\right)$

= ₹ 2250

इस प्रकार, वांछित धनराशि = ₹ 2250

देखें आपने कितना सीखा 9.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक में अज्ञात राशि ज्ञात कीजिए:

   (i) P = ₹ 1200, t = 5 वर्ष, r = 6%, I = ...

   (ii) P = ₹ 1600, t = 3 वर्ष, r = 10%, A = ...

   (iii) P = ..., t = 4 वर्ष, r = $3\frac{1}{2}$ %, I = ₹ 112

   (iv) P = ₹ 2800, t = ..., r = 10%, I = ₹ 560

   (v) P = ₹ 5000, t = 4 वर्ष, r = ..., I = ₹ 1600

2. 5% वार्षिक की दर से ₹ 3500 पर 146 दिन का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।

   (1 वर्ष = 365 दिन)

3. वह राशि ज्ञात कीजिए, जो 5% वार्षिक दर से 4 वर्ष में ₹ 720 हो जाएगी?

4. वह राशि ज्ञात कीजिए, जिस पर 10% वार्षिक दर से 4 वर्ष में साधारण ब्याज ₹ 1920 होगा?

5. 8% वार्षिक की दर से कितने समय में ₹ 400 पर ₹ 128 ब्याज प्राप्त होगा?

6. किस प्रतिशत वार्षिक ब्याज दर से 9 वर्ष में ₹ 900 पर ₹ 324 ब्याज प्राप्त होगा?

टिप्पणी

7. किस प्रतिशत वार्षिक ब्याज दर से $4\frac{1}{2}$ वर्ष में ₹ 1000 पर ₹ 450 ब्याज प्राप्त होगा?

8. कितने समय में 8% वार्षिक दर से ₹ 800 साधारण ब्याज पर ₹ 1056 हो जाएंगे?

9.2 चक्रवृद्धि ब्याज

अभी तक हमने उन स्थितियों को देखा, जहां पूरे ऋण काल में मूलधन एक ही रहा था। परंतु ऐसा होना सदा आवश्यक नहीं है। कुछ स्थितियों में, एक निश्चित अवधि के लिए जैसे ही ब्याज देय होता है, उसे मूलधन में जोड़ दिया जाता है तथा वह मिश्रधन अगली अवधि के लिए मूलधन मान लिया जाता है। प्रारंभिक मूलधन तथा अंतिम अवधि के अंत में प्राप्त मिश्रधन के अंतर को चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) कहते हैं। वह समय अवधि, जिसके प्रत्येक बार बाद मूलधन तथा ब्याज मिलकर अगली समय अवधि का मूलधन बनाते हैं, रूपांतरण अवधि (Conversion Period) कहलाती है। अतः यदि ब्याज 1 वर्ष बाद मूलधन में जोड़कर अगली अवधि का मूलधन बनाती है तो हम कहते हैं कि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित (Compounded Annually) होता है। इसी प्रकार 6 माह अथवा 3 माह की रूपांतरण अवधि होने पर हम कहते हैं कि ब्याज प्रति छमाही अथवा प्रति तिमाही संयोजित किया जाता है। यदि मिश्रधन A, मूलधन P, दर r% प्रति रूपांतरण अवधि तक रूपांतरण अवधियां n हों तो

$$A = P\{1 + r\}^n$$

यदि चक्रवृद्धि ब्याज को C द्वारा लिखें तो

$$C = A - P$$

$$= P\{1 + r\}^n - P$$

$$= P\{(1 + r)^n - 1\}$$

आइए, अब हम कुछ उदाहरण लेकर उपरोक्त को स्पष्ट करें।

उदाहरण 9.7 : 5% वार्षिक दर से ₹ 1000 पर 2 वर्ष का मिश्रधन तथा चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जब ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता हो।

हल : $A = P(1 + r)^n$: यहां P = ₹ 1000, r = 5%, समय = 2 वर्ष

अतः $n = 2 \times 1 = 2$

$$\therefore \quad A = ₹\ 1000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$$

$$= ₹\ 1000\left(\frac{21}{20}\right)^2$$

$$= ₹\left(\frac{1000 \times 441}{400}\right)$$

$$= ₹\ 1102.50$$

$C = A - P = (1102.50 - 1000) = ₹\ 102.50$

उदाहरण 9.8 : 10% वार्षिक की दर से ₹ 4000 पर एक वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जब ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता है।

हल : यहां $P = 4000$ रुपये, $r = \frac{10}{2}\%$ या 5% तथा समय 1 वर्ष = 2 छमाही

$\therefore \quad n = 2$

$$\therefore \quad C = ₹\ 4000\left\{\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 - 1\right\}$$

$$C = ₹\ 4000\left(\frac{441}{400} - 1\right)$$

$$= ₹\ 4000 \times \left(\frac{41}{400}\right) \quad = ₹\ 410$$

देखें आपने कितना सीखा 9.2

निम्नलिखित में मिश्रधन तथा चक्रवृद्धि ज्ञात कीजिए:

मूलधन (P)	दर वार्षिक (r)	समय (t)	रूपांतरण अवधि
(i) ₹ 5000	10%	2 वर्ष	वार्षिक
(ii) ₹ 7000	10%	1 वर्ष	अर्धवार्षिक
(iii) ₹ 2000	5%	1 वर्ष	अध वार्षिक
(iv) ₹ 500	20%	9 महीने	तिमाही
(v) ₹ 25000	20%	6 महीने	तिमाही

अभी तक हमें तीन राशियां P, r तथा n दी हुई थी तथा हमने सूत्र द्वारा A तथा C ज्ञात किया था। चार राशियों A, P, r तथा n में से कोई तीन दिए होने पर चौथी राशि ज्ञात की जा सकती है। आइए, अब हम उन स्थितियों को देखें।

(a) A, r तथा n दिए होने पर P ज्ञात करना

उदाहरण 9.9 : वह धन राशि ज्ञात कीजिए, जो चक्रवृद्धि ब्याज से 10% वार्षिक दर से 2 वर्ष में ₹ 3630 हो जाए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

हल : यहां A = ₹ 3630, P ज्ञात करना है, r = 10%, n = 2

$$\therefore \quad 3630 = P\left\{1+\frac{10}{100}\right\}^2$$

$$= P \times \frac{11\times 11}{10\times 10}$$

$$\therefore \quad P = \frac{3630\times 10\times 10}{11\times 11} = ₹\ 3000$$

अतः P = ₹ 3000

उदाहरण 9.10 : वह धन राशि ज्ञात कीजिए, जिस पर 8% वार्षिक की दर से 1 वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज ₹ 408 है, जबकि ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता है।

यहां C = ₹ 408, ब्याज दर = 8% वार्षिक, अतः $r = \frac{8}{2}\% = 4\%$,

$n = 1$ वर्ष $= \frac{12}{6} = 2$ छःमाही

$$\therefore \quad 408 = P\left\{\left(1+\frac{4}{100}\right)^2 - 1\right\}$$

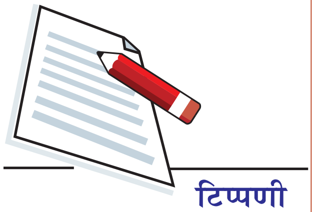
$$= P\left\{\left(\frac{26}{25}\times\frac{26}{25}\right) - 1\right\}$$

$$= P \times \frac{51}{625}$$

$$\therefore \quad P = \frac{625\times 408}{51}$$

$$= 5000$$

अतः धनराशि = ₹ 5000



टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 9.3

धन राशि P ज्ञात कीजिए, जब

	A	r	t	C	रूपांतरण अवधि
(i)	₹ 2163.20	4%	2 वर्ष	.....	प्रतिवर्ष
(ii)	₹ 3528	10%	1 वर्ष	.....	प्रति छमाही
(iii)	.....	8%	2 वर्ष	₹ 832	प्रतिवर्ष
(iv)	.....	20%	छ महीने	₹ 820	प्रति तिमाही
(v)	₹ 3025	10%	2 वर्ष	.....	वार्षिक

(b) A, P तथा n दिए हों तो r ज्ञात करना

उदाहरण 9.11 : किसी ब्याज की दर पर 64 रुपये की धन राशि $1\frac{1}{2}$ वर्ष में ₹ 125 हो जाती है, जबकि ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता हो। वार्षिक दर ज्ञात कीजिए।

हल : यहां A = ₹ 125, P = 64, $n = 1\frac{1}{2} \times 2 = 3, r = ?$

$$\therefore \qquad 125 = 64\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

$$\frac{125}{64} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

$$\frac{5}{4} = 1+\frac{r}{100}, \qquad \text{अत:}\ \frac{5}{100} = \frac{5}{4}-1 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad r = 25$$

अर्थात् दर = 25% छमाही

अत: वार्षिक दर = 25 × 2 = 50%

उदाहरण 9.12 : किस वार्षिक ब्याज की दर से 6 महीने में ₹ 400, ₹ 441 हो जाएंगे, जबकि ब्याज प्रति तिमाही संयोजित होता हो?

हल : यहां A = ₹ 441, P = ₹ 400, n = $\left(\frac{6}{3}\right)$ = 2, r ज्ञात करना है

$$441 = 400\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{441}{400} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^2 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

अतः $1+\frac{r}{100} = \frac{21}{20}$, अतः $\frac{r}{100} = \frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$

$\therefore \quad r = 5$

ब्याज दर = 5% तिमाही। अतः ब्याज की वार्षिक दर 20% है।

देखें आपने कितना सीखा 9.4

निम्नलिखित में अज्ञात राशि ज्ञात कीजिए:

A	P	r	t	रूपांतरण अवधि
(i) ₹ 4410	₹ 4000	....	2 वर्ष	वार्षिक
(ii) ₹ 9680	₹ 8000	....	1 वर्ष	छमाही
(iii) ₹ 12100	₹ 10000	....	2 वर्ष	वार्षिक
(iv) ₹ 6760	₹ 6250	....	6 महीने	तिमाही
(v) ₹ 18522	₹ 16000	....	9 महीने	तिमाही

(c) A, P तथा r दिए होने पर n ज्ञात करना

उदाहरण 9.13 : कितने समय में 10% वार्षिक दर से ₹ 800 का मिश्रधन ₹ 926.10 हो जाएगा, जबकि ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता हो।

हल: यहां A = ₹ 926.10, P = ₹ 800, r = $\frac{10}{2}$% अर्थात 5% , n = ?

$$\therefore \quad \frac{9261}{10} = 800\left\{\left(1+\frac{5}{100}\right)^n\right\}$$

$$\text{या} \quad \frac{9261}{8000} = \left(1+\frac{5}{100}\right)^n$$

$$\text{या} \quad \left(\frac{21}{20}\right)^3 = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad n = 3$$

क्योंकि ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता था, अतः $t = 1\frac{1}{2}$ वर्ष

देखें आपने कितना सीखा 9.5

	A	P	r	रूपांतरण अवधि
(i)	₹ 9261	₹ 8000	5%	वार्षिक
(ii)	₹ 3087	₹ 2800	10%	छमाही
(iii)	₹ 3630	₹ 3000	20%	छमाही
(iv)	₹ 9261	₹ 8000	20%	तिमाही
(v)	₹ 17576	₹ 15625	16%	तिमाही

चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज में अंतर

कुछ प्रश्नों में हमें जानना होता है कि दो तरह के ब्याजों पर राशि को लगाने से किसमें कितना अधिक ब्याज मिलेगा। आइए, इसे उदाहरण लेकर देखिए:

उदाहरण 9.14 : ₹ 48000 की राशि पर 5% वार्षिक दर से 3 वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज में अंतर ज्ञात कीजिए, जबकि चक्रवृद्धि ब्याज में ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता हो।

हल : यहां P = ₹ 48000, r = 5%, t = n = 3

अतः साधारण ब्याज $I = Prt$

$$= ₹\left(\frac{48000 \times 5 \times 3}{100}\right)$$

$$= ₹\ 7200$$

चक्रवृद्धि ब्याज $C = P\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right\}$

$$= ₹\ 48000\left\{\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 - 1\right\}$$

$$= ₹\ 48000\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^3 - 1\right\}$$

$$= ₹\ 48000 \times \left\{\frac{9261}{8000} - 1\right\}$$

$$= ₹\ \frac{48000 \times 1261}{8000}$$

$$= ₹\ 7566$$

अतः चक्रवृद्धि ब्याज–साधारण ब्याज = ₹ (7566 – 7200)

= ₹ 366

कभी–कभी इस अंतर को देकर तथा दर व समय देकर मूलधन निकालने को कहा जाता है। आइए, निम्नलिखित उदाहरण देखें:

उदाहरण 9.15 : किसी राशि पर चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज में 10% वार्षिक की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष में अंतर ₹ 183 है। धन राशि ज्ञात कीजिए, यदि चक्रवृद्धि ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता है।

हल : साधारण ब्याज के लिए P = ?, r = 10%, t = $\frac{3}{2}$ वर्ष

माना P = ₹ 100

$\therefore$ साधारण ब्याज $I = \left(\frac{100 \times 3 \times 10}{100 \times 2}\right) = 15$

II चक्रवृद्धि ब्याज के लिए P = ₹ 100, r = 5%, n = 3

$\therefore$ $C = ₹\ 100\left\{\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 - 1\right\}$

$$= ₹\ 100 \times \left(\frac{1261}{8000}\right)$$

$$= ₹\ \frac{1261}{80}$$

अतः $\quad C - I \quad = ₹\ \left(\frac{1261}{80} - 15\right)$

$$= ₹\ \frac{61}{80}$$

दिया है $C - I \quad = ₹\ 183$

यदि अंतर $\frac{61}{80}$ रुपये है तो राशि = ₹ 100

यदि अंतर 1 रुपये है तो राशि $= ₹\ \frac{100 \times 80}{61}$

यदि अंतर 183 रुपये है तो राशि $= ₹\ \left(\frac{100 \times 80 \times 183}{61}\right)$

$= ₹\ 24000$

अतः अभीष्ट राशि = ₹ 24000

देखें आपने कितना सीखा 9.6

1. निम्नलिखित में प्रत्येक में चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज में अंतर ज्ञात कीजिए:

	P	r	t	रुपांतरण अवधि
(i)	₹ 16000	10%	$1\frac{1}{2}$ वर्ष	प्रति छमाही
(ii)	₹ 12000	20%	6 महीने	प्रति छमाही
(iii)	₹ 5000	10%	2 वर्ष	वार्षिक

2. किसी राशि पर 10% वार्षिक की दर से 2 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज में अंतर 16 रुपये है, वह राशि ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित में अज्ञात राशि ज्ञात करें:

	P	r	t	रुपांतरण अवधि	C – I
(i)	....	10%	2 वर्ष	वार्षिक	₹ 150
(ii)	....	8%	1 वर्ष	छमाही	₹ 10
(iii)	....	20%	9 महीने	तिमाही	₹ 183

आइए दोहराएं

- किसी उधार ली गई धन राशि के प्रयोग के बाद जो अतिरिक्त राशि दी जाती है, वह ब्याज कहलाती है
- साधारण ब्याज = मूलधन × दर × समय

  $I = Prt$
- चार अज्ञात राशियों, I, P, r और t में से कोई तीन दिए होने पर चौथा ज्ञात किया जा सकता है
- जब लिए गए ऋण की पूरी अवधि में ब्याज केवल प्रारंभिक उधार ली गई राशि पर ही लगता है तो उस ब्याज को साधारण ब्याज कहते हैं
- एक निश्चित अवधि के लिए ब्याज देय होने पर मूलधन में जोड़ देने पर, उसे अगली अवधि का मूलधन मानकर, मिलने वाले ब्याज को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

  $A = P(1 + r)^n$

  $C = P[(1 + r)^n - 1]$
- मिश्रधन – मूलधन = चक्रवृद्धि ब्याज
- चक्रवृद्धि ब्याज, साधारण ब्याज, दर तथा समय ज्ञात होने पर मूलधन, रूपांतरित अवधियां ज्ञात किए जा सकते हैं।

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित में प्रत्येक में अज्ञात राशि साधारण ब्याज द्वारा ज्ञात कीजिए:

	P	r	t	I
(i)	₹ 6000	5%	3 वर्ष	....
(ii)	₹ 5000	....	2 वर्ष	₹ 1000
(iii)	₹ 2000	8%	....	₹ 480
(iv)	₹ 25000	10%	2 वर्ष	....
(v)	....	8%	$1\frac{1}{2}$ वर्ष	₹ 1080

टिप्पणी

2. 10% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से कोई राशि कितने वर्ष में

   (i) दुगुनी हो जाएगी

   (ii) तिगुनी हो जाएगी?

3. साधारण ब्याज पर ₹ 750 का मिश्रधन 2 वर्ष में ₹ 810 है। साधारण ब्याज की उसी दर से 5 वर्ष में मिश्रधन कितना हो जाएगा?

4. निम्नलिखित में अज्ञात राशियां ज्ञात कीजिए:

	A मिश्रधन	P मूलधन	C च. ब्याज	r दर	t समय	रूपांतरण अवधि
(i)	....	₹ 5000	....	4% वार्षिक	3 वर्ष	वार्षिक
(ii)	....	₹ 6000	....	5% वार्षिक	2 वर्ष	वार्षिक
(iii)	....	₹ 8000	....	10% वार्षिक	$1\frac{1}{2}$ वर्ष	अर्ध वार्षिक
(iv)	₹ 9261	....	....	20% वार्षिक	9 महीने	तिमाही
(v)	₹ 17576	₹ 15625	....	16% वार्षिक	....	तिमाही
(vi)	₹ 1331	₹ 1000	....	20% वार्षिक	....	छमाही
(vii)	₹ 1331	₹ 1000	....	....	3 वर्ष	वार्षिक

5. 5% वार्षिक दर से एक धन राशि पर 2 वर्ष के साधारण ब्याज तथा चक्रवृद्धि ब्याज (जो प्रतिवर्ष संयोजित किया जाता है) का अंतर ₹ 60 है। वह धन राशि ज्ञात कीजिए।

6. चक्रवृद्धि ब्याज से एक धन राशि 3 वर्ष में स्वयं की $\frac{729}{512}$ गुनी हो जाती है। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

7. प्रश्न 4 [(i) से (ii)] के लिए चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज में अंतर ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए मूलधन ज्ञात कीजिए:

	C - I	ब्याज दर	t	रुपांतरण अवधि	P
(i)	₹ 40	10% वार्षिक	1 वर्ष	छमाही	....
(ii)	₹ 10	20% वार्षिक	1 वर्ष	छमाही	....
(iii)	₹ 549	20% वार्षिक	9 मास	तिमाही	....
(iv)	₹ 122	10% वार्षिक	$1\frac{1}{2}$ वर्ष	छमाही	....
(v)	₹ 40	8% वार्षिक	1 वर्ष	छमाही	....

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 9.1

1. (i) ₹ 360 (ii) ₹ 2080 (iii) ₹ 800 (iv) 2 वर्ष (v) 8%

2. ₹ 70 3. ₹ 600 4. ₹ 4800 5. 4 वर्ष

6. 4% 7. 10% 8. 4 वर्ष

देखें आपने कितना सीखा 9.2

मिश्रधन	चक्रवृद्धि ब्याज
(i) ₹ 6050	₹ 1050
(ii) ₹ 7717.50	₹ 717.50
(iii) ₹ 2101. 25	₹ 101.25
(iv) ₹ 578.81	₹ 78.81
(v) ₹ 27562.50	₹ 2562.50

देखें आपने कितना सीखा 9.3

(i) ₹ 2000 (ii) ₹ 3200 (iii) ₹ 5000 (iv) ₹ 8000

(v) ₹ 2500

देखें आपने कितना सीखा 9.4

(i) r = 5% (ii) 20% (iii) 10% (iv) 16% (v) 20%

देखें आपने कितना सीखा 9.5

(i) 3 वर्ष (ii) 1 वर्ष (iii) 1 वर्ष (iv) 9 महीने (v) 9 महीने

देखें आपने कितना सीखा 9.6

1. (i) ₹ 2522 , ₹ 2400, ₹ 122

   (ii) ₹ 1230, ₹ 1200, ₹ 30

   (iii) ₹ 1050, ₹ 1000, ₹ 50

2. ₹ 1600

3. (i) ₹ 15000 (ii) ₹ 6250 (iii) ₹ 24000

आइए अभ्यास करें

1. (i) ₹ 900 (ii) 10% (iii) 3 वर्ष (iv) ₹ 5000
   (v) ₹ 9000

2. (i) 10 वर्ष (ii) 20 वर्ष

3. ₹ 900

4. (i) ₹ 5624.32, ₹ 624.32 (ii) ₹ 6615, ₹ 615
   (iii) ₹ 9261, ₹ 1261 (iv) ₹ 8000, ₹ 1261
   (v) ₹ 1951, 9 महीने (vi) ₹ 331, $1\frac{1}{2}$ वर्ष
   (vii) ₹ 331, 10%

5. ₹ 24000

6. 12.5%

7. (i) ₹ 24.32 (ii) ₹ 15 (iii) ₹ 61 (iv) ₹ 61 (v) ₹ 76

8. (i) ₹ 16000 (ii) ₹ 1000 (iii) ₹ 72000 (iv) ₹ 16000
   (v) ₹ 25000

मॉड्यूल IV

ज्यामिति

ज्योमैट्री (ज्यामिति) ग्रीक (यूनानी) भाषा का शब्द है, जिसमें ज्यो का अर्थ भूमि और मीतरों का अर्थ होता है मापना। अत: ज्योमैट्री का अर्थ भूमि का मापन है। इसका अध्ययन मिस्र में चार-पांच हजार वर्ष पहले प्रारंभ हुआ। बेबीलोनिया के वासियों ने भी इसके अध्ययन में बहुत योगदान दिया। एक यूनानी गणितज्ञ यूक्लिड (ईसा पूर्व 300) ने जो उस समय मिस्र में एलक्जेंडरिया स्थित गणित के अध्यापक थे, उस समय तक ज्यामिति के सभी परिणाम, जो उस समय तक पता थे, को इकट्ठा कर, उन्हें एक सुसंयोजित क्रम और एक तर्कसंगत क्रमबद्ध समूह के रूप में रखा, जिन्हें 'एलीमेंट्स' कहते हैं।

प्राचीन भारतीय में यज्ञ वेदियों की संरचना के लिए विभिन्न सममित आकृतियों की आवश्यकता पड़ती थी और इसमें ज्यामिति का प्रयोग करना पड़ता था। कई भारतीय विद्वानों ने, जिनमें बौधायन, भास्कर, आर्यभट्ट तथा ब्रह्मगुप्त के नाम अग्रणी हैं, ज्यामिति में प्रयोग में लाए जाने वाले बहुत से परिणामों का आविष्कार किया।

ज्यामितीय ज्ञान का प्रयोग, अनुमाप, आलेखन, भवन निर्माण हेतु नक्शे खींचने, सड़कों और बांधों (डैम) के निर्माण के लिए नक्शे बनाने के लिए होता है।

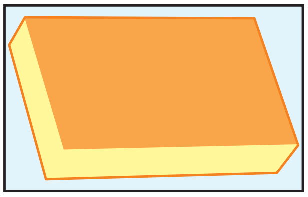
इस मॉड्यूल में आप बिंदु, कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज और वृत्त की संकल्पना और इनके गुण-धर्मों के बारे में सीखेंगे। ध्यान देने योग्य है कि यह सभी एक तलीय आकृतियां हैं।

आप दिए गए रेखाखंडों और कोणों को मापना भी सीखेंगे।

10

आधारभूत ज्यामितीय अवधारणाएं

दैनिक जीवन में आप सभी विभिन्न आकृतियों वाली अनेक वस्तुएं प्रयोग में लाते हैं। अपने ज्यामिति-बॉक्स अथवा पुस्तक की आकृति को ध्यान से देखिए। अपना हाथ फिराकर इनके कोनों, किनारों व फलकों को अनुभव करें। देखिए कि



चित्र 10.1

इनके दो फलक कहां मिलते हैं?

इनके दो किनारे कहां मिलते हैं?

आप तल तथा उसमें खींची गई रेखा, रेखाखंड व किरण के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। किसी आकृति अथवा भवन के लिए मानचित्र आदि बनाने के लिए, सही-सही माप के रेखाखंडों की रचना करनी होती है। रेखाखंड खींचने और मापन के लिए, जिन ज्यामितीय यंत्रों का प्रयोग किया जाता है, वे आपने ज्यामितीय बक्स में देखें हैं। ज्यामितीय आकृतियों को खींचने और मापने के लिए ये यंत्र निम्नलिखित हैं:

(a) फुटा (b) डिवाइडरज (c) परकार (d) सैट स्कवेयर (e) चांदा (प्रोट्रैक्टर)

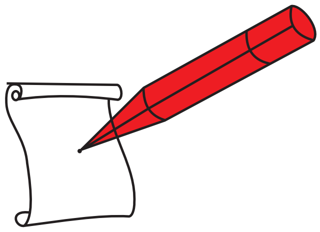
इस पाठ से आप सीखेंगे :

- बिन्दु, रेखा व तल के विषय में।
- आकृतियों के मुख्य अवयवों के विषयों में।
- प्रतिच्छेदी, समांतर व संगामी रेखाओं के विषय में।
- ज्यामितीय यंत्र तथा उनका प्रयोग
- रेखाखंड को मापने की विधि
- दिए गए माप का रेखाखंड खींचना

10.1 बिन्दु, रेखा व तल

बिन्दु :

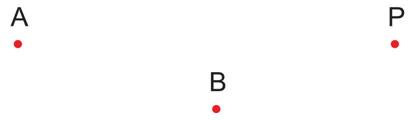
तेज नोक वाली एक पेंसिल लीजिए। इसकी नोक एक कागज पर दबाइए। आप क्या पाते हैं? कागज पर एक चिह्न (चित्र 10.2)।



चित्र 10.2

ज्यामिति में इस चिह्न को 'बिन्दु' कहते हैं। इसे हम किसी वस्तु की स्थिति दिखाने के लिए प्रयोग में लाते हैं। इसकी कोई लंबाई अथवा चौड़ाई नहीं होती। पेंसिल की नोक जितनी तेज अथवा पैनी होगी, उतना ही बिन्दु का चिह्न अच्छा बनेगा।

भिन्न-भिन्न बिन्दु, भिन्न-भिन्न स्थितियां प्रदर्शित करते हैं। बिन्दु को नाम देने के लिए देवनागरी लिपि के एक अक्षर अथवा अंग्रेजी के एक बड़े अक्षर को प्रयोग में लाते हैं, जैसा चित्र 10.3 में दिखाया गया है।

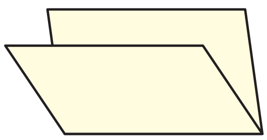


चित्र 10.3

ज्यामिति-बॉक्स अथवा पुस्तक का एक कोना अथवा सुई की नोक, बिन्दु के अच्छे उदाहरण हैं।

10.1.1 रेखा

एक कागज को मोड़कर, उस पर तह का निशान बनाइए। तह का यह निशान सरल रेखा के एक भाग का एक अच्छा उदाहरण है (चित्र 10.4)।



चित्र 10.4

चित्र 10.5

धागे का एक लंबा टुकड़ा लीजिए। इसे एक स्थान पर पकड़कर थोड़ी दूरी पर एक अन्य बालक को खींचने को कहिए। खींचा हुआ धागा, सरल रेखा के भाग का एक और उदाहरण है (चित्र 10.5)।

अब आप दोनों ओर पीछे हटते हुए धागे की लंबाई बढ़ाइए। क्या धागे की लंबाई बढ़ने से सरल रेखा बदल जाती है? कदापि नहीं। सरल रेखा वही रहती है। वास्तव में, सरल रेखा की लंबाई अनंत होती है और इसे दोनों ओर जितना चाहें बढ़ाया जा सकता है (चित्र 10.6)।

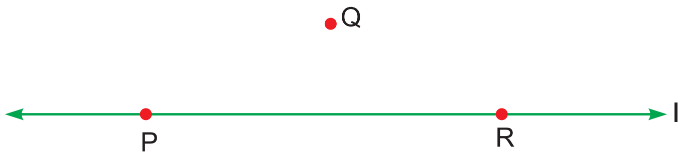
चित्र 10.6

सरल रेखा (अथवा रेखा) खींचने के लिए एक पैमाने या किसी सीधी पट्टी का प्रयोग करते हैं और इसके दोनों सिरों पर तीर के निशान बना देते हैं, जो इसके अनंत होने को प्रदर्शित करते हैं।

एक पैमाना लेकर, उसके किनारे के साथ-साथ जितना भी पास-पास संभव हो सके, बहुत सारे बिन्दु लगाइए (चित्र 10.7)।

चित्र 10.7

आप क्या पाते हैं? यह तो एक रेखा बन गई। अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि ''सरल रेखा अनेक (वास्तव में अनंत) बिन्दुओं का एक समूह है''



चित्र 10.8

सभी बिन्दु जिनसे रेखा बनती है, उस पर स्थित होते हैं।

चित्र 10.8 में P, Q तथा R बिन्दुओं की स्थिति देखिए। कौन से बिन्दु रेखा पर स्थित हैं और कौन से नहीं? बिन्दु P तथा R रेखा पर स्थित हैं, जबकि बिन्दु Q नहीं।

किसी रेखा का नाम उस पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं अथवा एक अक्षर से व्यक्त किया जाता है।

उपर्युक्त रेखा को हम PR या RP अथवा रेखा l नाम दे सकते हैं।

किसी सरल रेखा को एक चल बिन्दु द्वारा बनाया गया पथ भी समझा जा सकता है, जो एक ही अथवा विपरीत दिशाओं में अनंत तक चलता जाता है।

10.1.2 तल

अपनी हथेली को किसी दीवार अथवा मेज की सतह अथवा श्यामपट्ट पर फिराकर अनुभव कीजिए कि वह कितनी सम (एकसार) है। इनमें से प्रत्येक तल का एक उदाहरण है।

तालाब में ठहरे हुए पानी की सतह या फुटबाल का मैदान भी तल के उदाहरण हैं।

चित्र 10.9

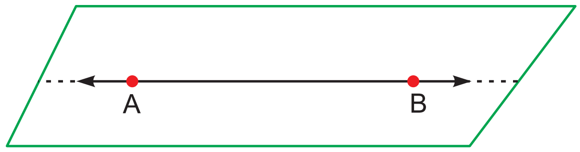
अगर हम खेल के मैदान को लंबाई तथा चौड़ाई में बढ़ा भी दें, तब भी तल वही रहता है, बदलता नहीं।

अपनी पुस्तक के एक पन्ने को अथवा कागज को भी देखिए। क्या ये भी तल के उदाहरण हैं?

ठीक है। ये भी तल के उदाहरण हैं।

किसी तल का विस्तार सभी दिशाओं में अनंत (सीमा रहित) माना जाता है।

किसी कागज पर दो बिन्दु A तथा B अंकित करें। क्या ये बिन्दु कागज के तल में स्थित हैं? अवश्य हैं।



चित्र 10.10

A और B को मिलाते हुए रेखा AB खींचिए और दोनों ओर बढ़ाइए। रेखा AB भी कागज के तल में स्थित है।

बिन्दु, रेखा तथा तल ज्यामिति में मूलभूत अवधारणाएं हैं, जिनकी हम परिभाषा नहीं दे सकते, लेकिन इन्हें स्पष्ट समझना आवश्यक है।

देखें आपने कितना सीखा 10.1

1. निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए दो उदाहरण दीजिए:

   (a) एक बिन्दु (b) एक रेखा (c) एक तल

2. उपयुक्त शब्दों द्वारा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (a) धूल का कण .... का उदाहरण है।

   (b) कमरे का फर्श .... का उदाहरण है।

   (c) पुस्तक का किनारा .... का उदाहरण है।

   (d) एक रेखा पर .... बिन्दु स्थित होते हैं।

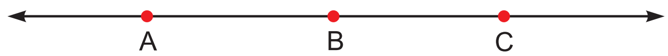
   (e) मानचित्र में किसी नगर की स्थिति .... द्वारा प्रदर्शित की जाती है।

   (f) एक रेखा का नाम देने के लिए .... बिन्दुओं की आवश्यकता होती है।

   (g) एक रेखा की लंबाई .... होती है।

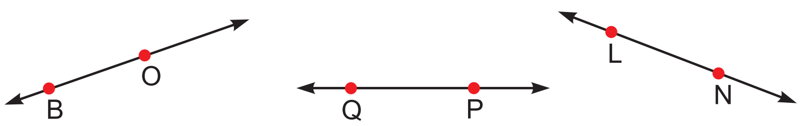
   (h) तल में स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा भी .... में स्थित होती है।

3. चित्र 10.11 में दी गई रेखा के तीन विभिन्न रूपों में नाम लिखिए।



चित्र 10.11

4. चित्र 10.12 में दी गई रेखाओं के नाम लिखिए। क्या ये सभी एक तल में स्थित हैं?



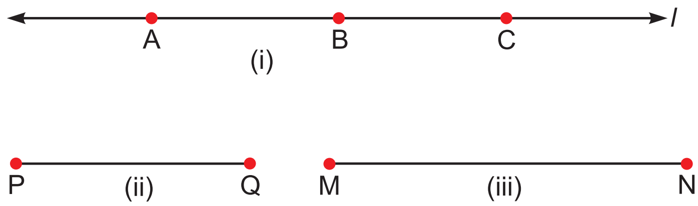
चित्र 10.12

5. एक तल में कितनी रेखाएं खींची जा सकती हैं?

10.2 रेखाखंड व किरण

10.2.1 रेखाखंड

एक रेखा l खींचिए और उस पर तीन बिन्दु A, B तथा C अंकित करें। A और B बिन्दुओं के बीच का भाग, पूरी रेखा का केवल एक भाग है। अत: हम इसे 'रेखाखंड' कहते हैं। इसी प्रकार AC तथा BC भी पूरी रेखा l के भाग ही हैं अथवा रेखाखंड ही है।



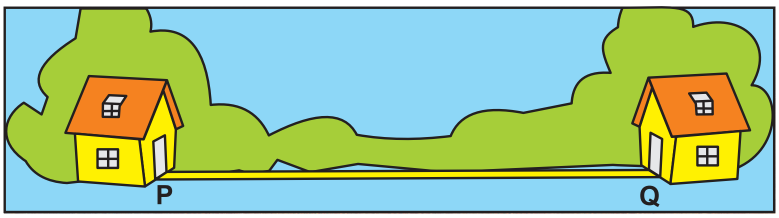
चित्र 10.13

चित्र 10.13(ii) में, PQ भी एक रेखाखंड है, जिसका अंत बिन्दु P तथा Q हैं। चित्र 10.13(iii) में MN एक अन्य रेखाखंड है, जिसके अंत बिन्दु M तथा N हैं।

रेखाखंड के सिरों पर तीर के चिह्न नहीं लगाए जाते, क्योंकि रेखाखंड सीमित होता है।

रेखा का एक भाग, जिसमें दोनों ओर अंत बिन्दु होते हैं, रेखाखंड कहलाता है।

स्मरण कीजिए कि बॉक्स, फर्श अथवा मेज का किनारा भी सीमित है और रेखाखंड के ही उदाहरण हैं। माना कि P व Q दो घरों की स्थिति है। P तथा Q के बीच की कम से कम दूरी क्या होगी?



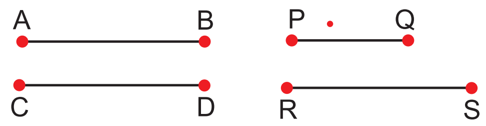
चित्र 10.14

P तथा Q के बीच कम से कम दूरी PQ रेखाखंड की लंबाई होगी, जो किसी पैमाने से मापी जा सकती है।

एक रेखाखंड दो बिन्दुओं के बीच कम से कम दूरी प्रदर्शित करता है और इसकी लंबाई निश्चित होती है।

दो रेखाखंडों की लंबाइयों की तुलना एक पैमाने अथवा विभाजक (Divider) द्वारा की जा सकती है।

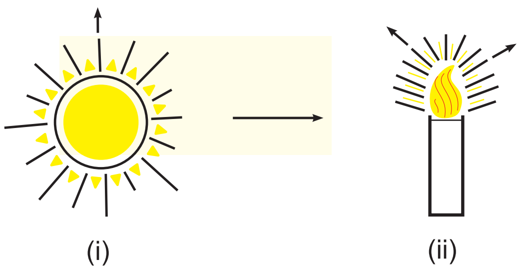
AB तथा CD रेखाखंड बराबर हैं, क्योंकि इनकी लंबाइयां बराबर हैं। अत: AB = CD। रेखाखंड PQ की लंबाई रेखाखंड RS से कम है। अत: हम लिखते हैं PQ < RS। इसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है RS > PQ।



चित्र 10.15

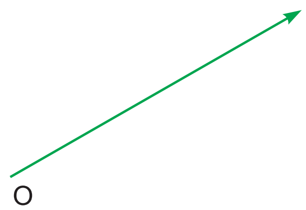
10.2.2 किरण

सूर्य की किरणों अथवा प्रकाश किरणों से हम परिचित हैं। ये सभी, प्रकाश के स्रोत एक बिन्दु से प्रारंभ होती हैं (चित्र 10.16)।



चित्र 10.16

आइए, कागज पर एक बिन्दु O अंकित करें। बिन्दु O से प्रारंभ कर एक रेखा खींचिए और उसे एक ही दिशा में सीधा बढ़ाइए (चित्र 10.17)



चित्र 10.17

यह भी रेखा का एक भाग है, जिसमें प्रारंभिक बिन्दु तो है, लेकिन अंत बिन्दु नहीं है और यह एक ही दिशा में अनंत बिन्दु तक जाती है। इसे हम किरण कहते हैं।

किरण में एक प्रारंभिक बिन्दु होता है और वह एक ही दिशा में बढ़ती जाती है।

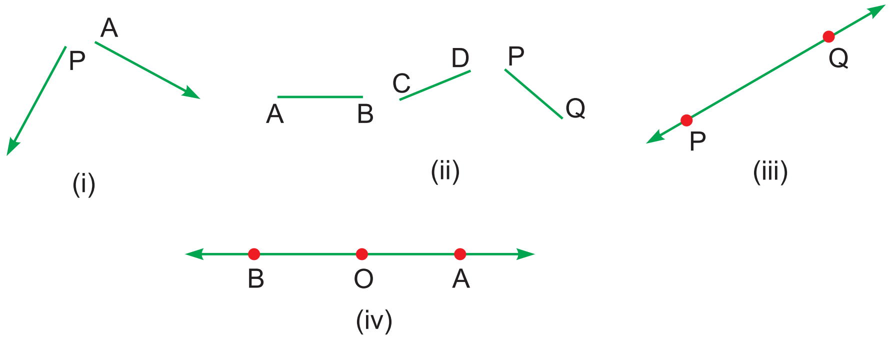
ध्यान रखिए (चित्र 10.18):

1. किरण में एक ही प्रारंभिक बिन्दु होता है, यह लंबाई में अनंत होती है (i)।

2. रेखाखंड में दो अंत बिन्दु होते हैं और उसकी लंबाई निश्चित होती है (ii)।

3. रेखा में कोई अंत बिन्दु नहीं होता और उसकी लंबाई अनंत होती है (iii)।

किरण को नाम देने के लिए दो बिन्दु प्रयोग करते हैं। (iv) में, OA तथा OB दो किरणें विपरीत दिशाओं में हैं।



चित्र 10.18

देखें आपने कितना सीखा 10.2

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (a) रेखाखंड की लंबाई .... होती है।

   (b) रेखाखंड के .... अंत बिन्दु होते हैं।

   (c) किरण का एक .... बिन्दु होता है।

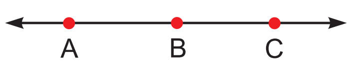
   (d) किरण की लंबाई .... होती है।

   (e) किरण को प्रदर्शित करने के लिए .... ही ओर तीर का निशार लगाते हैं।

2. दिए हुए चित्र 10.19 को देखकर नाम बताइए :

   (a) किन्हीं दो रेखाखंडों का

   (b) दो विपरीत किरणों का



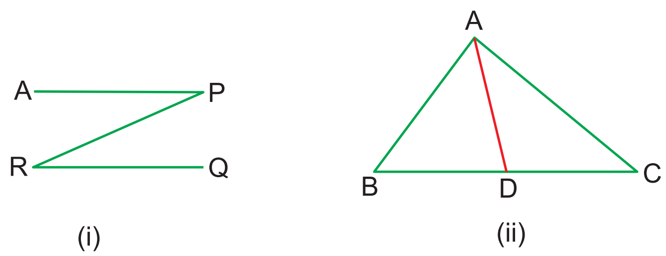
चित्र 10.19

3. एक बिन्दु P अंकित कीजिए और इससे प्रारंभ कर

   (a) दो रेखाखंड खींचिए, जो एक ही रेखा पर हों और उनके नाम PQ और PR रखिए।

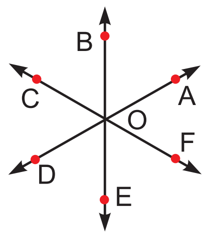
   (b) दो विपरीत किरणें खींचिए और उनको PL तथा PM नाम दीजिए।

4. निम्नलिखित चित्रों में, सभी रेखाखंडों के नाम लिखिए:



चित्र 10.20

5. चित्र 10.21 में, विपरीत किरणों के युग्मों के नाम लिखिए।

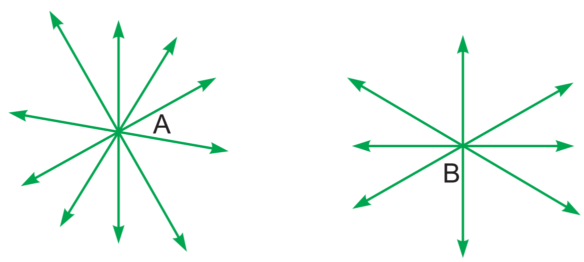


चित्र 10.21

10.3 दो बिन्दुओं से होती हुई रेखा तथा एक ही तल में दो रेखाएं

एक कागज पर एक बिन्दु A अंकित कीजिए। इस बिन्दु से गुजरती हुई आप कितनी रेखाएं खींच सकते हैं? जितनी चाहें उतनी रेखाएं खींची जा सकती हैं (वास्तव में अनंत रेखाएं खींच सकते हैं)।

A से कुछ दूरी पर एक अन्य बिन्दु B लीजिए। इस बिन्दु से होती हुई भी अनंत रेखाएं खींची जा सकती हैं।

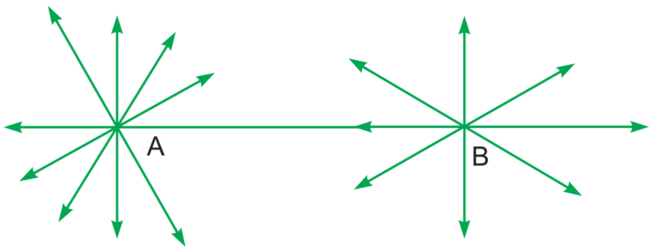


चित्र 10.22

अतः हम कह सकते हैं कि

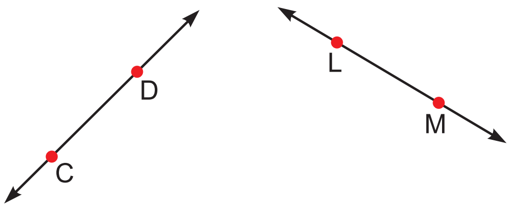
तल में दिए किसी बिन्दु से असंख्य रेखाएं खींची जा सकती हैं।

बिन्दु A तथा B से गुजरने वाली सभी रेखाओं में से कितनी रेखाएं दोनों बिन्दुओं से गुजरती हैं?



चित्र 10.23

केवल एक रेखा AB या BA दोनों बिन्दुओं से गुजरती है।



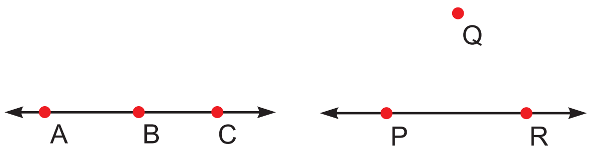
चित्र 10.24

C तथा D बिन्दुओं से अथवा L तथा M बिन्दुओं में से होती हुई भी एक ही रेखा खींची जा सकती है।

अतः हम कह सकते हैं कि

दो बिन्दुओं से गुजरती हुई एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

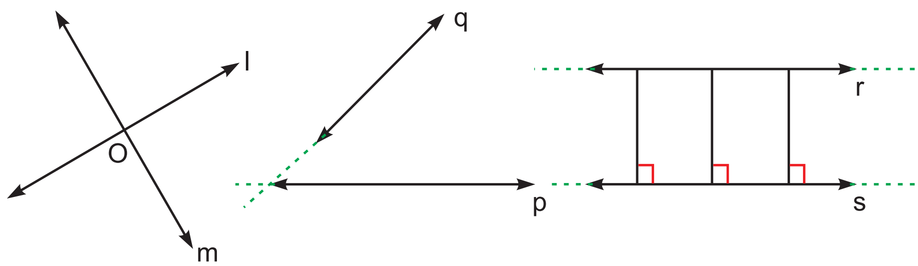
जरा सोचिए, यदि बिन्दु तीन हों तो कितनी रेखाएं खींच पाएंगे।



चित्र 10.25

हम देखते हैं कि तीन बिन्दुओं A, B तथा C में से होती हुई एक रेखा खींच सकते हैं, लेकिन P, Q तथा R से होती हुई कोई रेखा नहीं। इससे पता चलता है कि तीन बिन्दुओं से होती हुई एक रेखा कभी खींच सकते हैं, कभी नहीं अथवा सदैव नहीं।

अब आप रेखाओं के निम्नलिखित युग्मों को देखिए:



चित्र 10.26

l तथा m रेखाओं में एक उभयनिष्ठ बिन्दु O है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि ये प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं, जो एक-दूसरे को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

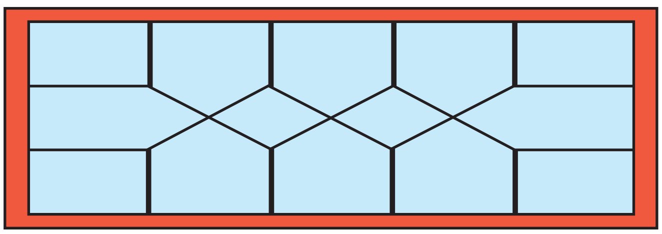
रेखाएं p तथा q प्रतिच्छेद करती प्रतीत नहीं होती, लेकिन रेखाएं लंबाई में अनंत होती हैं। अत: बढ़ाने पर ये भी प्रतिच्छेद करती हैं। अत: ये भी प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं।

रेखाओं r तथा s में कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं है। ये दोनों ओर बढ़ाए जाने पर भी न तो मिलेंगी, न ही प्रतिच्छेद करेंगी, क्योंकि इनके बीच की दूरी सदैव समान रहती है। ये समांतर रेखाएं हैं।

एक रेलगाड़ी, दो पटरियों पर चलती है, जो समांतर रेखाओं का एक उत्तम उदाहरण है।

चित्र 10.27

खिड़की में लगी लोहे की ग्रिल (जाली) को देखिए। इसमें भी अनेक समांतर और प्रतिच्छेदी पट्टियां लगी होती हैं।

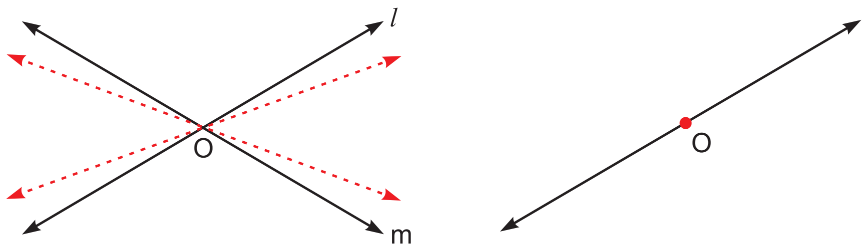


चित्र 10.28

पैमाने, श्यामपट्ट तथा मेज के आमने-सामने वाले किनारे भी समांतर ही होते हैं।

एक तल में खींची गई दो रेखाएं या तो एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं अन्यथा वे समांतर होती हैं।

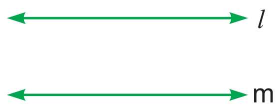
ध्यान से देखिए कि चित्र में दो रेखाएं l तथा m एक-दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद कर रही हैं।



चित्र 10.29

अब मान लीजिए कि रेखा m को धीरे-धीरे बिन्दु O पर घुमाया जाता है। घुमाते-घुमाते एक स्थिति ऐसी आएगी कि रेखा m पूरी तरह रेखा l के ऊपर आकर उसे ढक लेगी और दोनों रेखाएं एक ही रेखा दिखाई देंगी। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि रेखा m रेखा l पर संपाती (coincident) है। दूसरे शब्दों में, जब दो रेखाएं एक-दूसरे पर संपाती होती हैं, तब उनके सभी बिन्दु उभयनिष्ठ होते हैं।

अब एक दूसरा उदाहरण लेते हैं। l और m दो समांतर रेखाएं हैं।



चित्र 10.30

अब मान लीजिए कि रेखा m को धीरे-धीरे l के समांतर रखते हुए ऊपर खिसकाया जाता है। ऐसा करते हुए एक स्थिति ऐसी आएगी कि रेखा m रेखा l के ऊपर आकर उसे पूरी तरह ढक लेगी। तब ये भी संपाती रेखाएं होंगी।

दो संपाती रेखाओं में एक रेखा के सभी बिन्दु और दूसरी रेखा के सभी बिन्दु उभयनिष्ठ होते हैं।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

1. दो समांतर रेखाओं में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं होता।

2. दो प्रतिच्छेदी रेखाओं में केवल एक बिन्दु उभयनिष्ठ होता है।

3. दो संपाती रेखाओं में सभी बिन्दु उभयनिष्ठ होते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 10.3

1. प्रत्येक कथन को सही बनाते हुए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (a) दो समांतर रेखाएं किसी भी बिन्दु पर .... मिलती हैं।

   (b) दो प्रतिच्छेदी रेखाओं में केवल .... बिन्दु उभयनिष्ठ होता है।

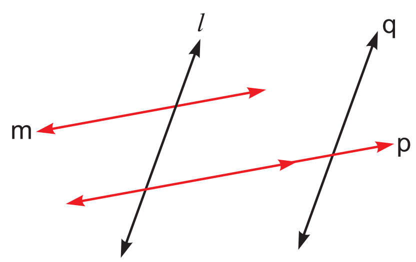
   (c) अगर दो रेखाओं में दो या अधिक बिन्दु उभयनिष्ठ हों, तो वे .... रेखाएं होती हैं।

   (d) एक ही तल में दो विभिन्न रेखाएं या तो समांतर होगी अथवा ....।

2. चित्र 10.31 देखिए और बताइए–

   (a) समांतर रेखाओं के दो जोड़े।

   (b) प्रतिच्छेदी रेखाओं के सभी जोड़े।



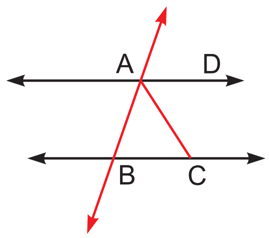
चित्र 10.31

3. एक पैमाना लीजिए और उसके दोनों लंबे किनारों के साथ दो रेखाएं खींचिए। ये किस प्रकार की रेखाएं हैं?

4. चित्र 10.32 देखिए और बताइए–

   (a) समांतर रेखाओं का एक जोड़ा।

   (b) प्रतिच्छेदी रेखाओं के दो जोड़े।



चित्र 10.32

5. (a) एक बिन्दु से गुजरती हुई कितनी रेखाएं खींची जा सकती हैं? क्या आप इन सभी रेखाओं को खींच सकते हैं?

   (b) दो बिन्दुओं से गुजरती हुई कितनी रेखाएं खींची जा सकती हैं?

   (c) तीन बिन्दुओं में, सभी में से गुजरती हुई कितनी रेखाएं खींची जा सकती हैं?

10.4 संरेखीय बिन्दु व संगामी रेखाएं

10.4.1 संरेखीय बिन्दु

चित्र 10.33 में बिन्दुओं A, B व C को ध्यान से देखिए। क्या हम एक ऐसी रेखा खींच सकते हैं, जो तीनों बिन्दुओं से गुजरती हो? यदि हम A व B बिन्दुओं से होती हुई रेखा खींचते हैं तो वह C में से नहीं गुजरती। कोई अन्य दो बिन्दु लेकर भी देखें तो वह रेखा तीसरे बिन्दु में से नहीं गुजरेगी। तीनों बिन्दुओं में से होती हुई हम कोई भी रेखा नहीं खींच सकते, क्योंकि वे एक ही रेखा में नहीं हैं।

चित्र 10.33

अब इन तीन बिन्दुओं P, Q व R को देखिए।

चित्र 10.34

इन तीनों में से गुजरती हुई एक रेखा खींची जा सकती है।

चित्र 10.35

दूसरे शब्दों में, तीनों बिन्दु एक ही रेखा पर हैं, अर्थात् ये संरेखीय बिन्दु हैं।

इसी प्रकार, निम्नलिखित चार बिन्दु L, M, N व O एक ही रेखा पर स्थित हैं।

चित्र 10.36

ये भी संरेखीय बिन्दु हैं।

यदि तीन या अधिक बिन्दुओं में, सभी में से गुजरती हुई एक ही रेखा खींची जा सकें, तो वे बिन्दु संरेखीय बिन्दु कहलाते हैं।

अगर सभी बिन्दुओं में से गुजरती हुई एक ही रेखा न खींची जा सके, तब वे असंरेखीय बिन्दु कहलाते हैं।

10.4.2 संरेखीय बिन्दुओं को अंकित करना

संरेखीय बिन्दु एक पैमाने की सहायता से अंकित किए जा सकते हैं।

कागज पर पहले दो बिन्दु A व B अंकित कीजिए। उनको मिलाते हुए एक रेखा AB खींचिए। अब इस रेखा पर अन्य बिन्दु C व D लगाइए।

चित्र 10.37

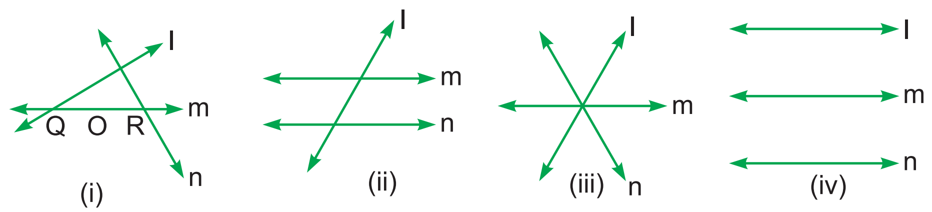
इस प्रकार चार संरेखीय बिन्दु अंकित हो गए।

10.4.3 संगामी रेखाएं

हम सीख चुके हैं कि एक ही तल में दो भिन्न रेखाएं या तो समांतर होंगी अथवा एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करेंगी।

चित्र 10.38

लेकिन यदि तल में तीन रेखाएं हों,



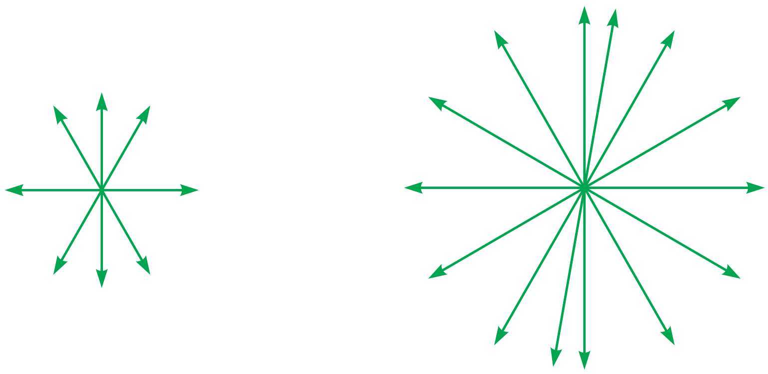
चित्र 10.39

तब वे एक-दूसरे को, तीन बिन्दुओं पर भी अथवा दो बिन्दुओं पर अथवा एक ही बिन्दु पर अथवा समांतर होने पर किसी भी बिन्दु पर नहीं काटती।

तीन या अधिक रेखाएं, जो सभी एक-दूसरे को एक ही बिन्दु पर काटती हैं अथवा सभी एक ही बिन्दु से गुजरती हैं, संगामी रेखाएं कहलाती हैं। यह बिन्दु इन रेखाओं का संगमन बिन्दु कहलाता है।

क्या अब आप बता सकते हैं कि ऊपर दिए चित्र में कौन सी रेखाएं संगामी हैं। अवश्य ही, स्थिति (iii) में।

निम्नलिखित चित्रों में भी कुछ संगामी रेखाएं दिखाई गई हैं:

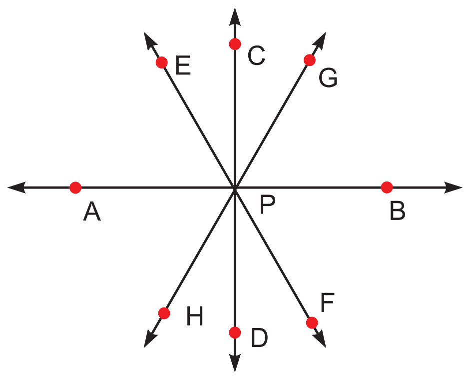


चित्र 10.40

10.4.4 संगामी रेखाओं की रचना

संगामी रेखाएं खींचने के लिए, हम पहले एक बिन्दु निर्धारित करते हैं और फिर उसमें से गुजरती हुई अनेक रेखाएं पैमाने द्वारा खींचते हैं।

चित्र 10.41 में हमने पहले एक बिन्दु P लिया और फिर उसमें से गुजरती हुई रेखाएं AB, CD, EF तथा GH खींचीं। इस प्रकार ये संगामी रेखाएं प्राप्त हुईं, जिनका संगमन बिन्दु P है।



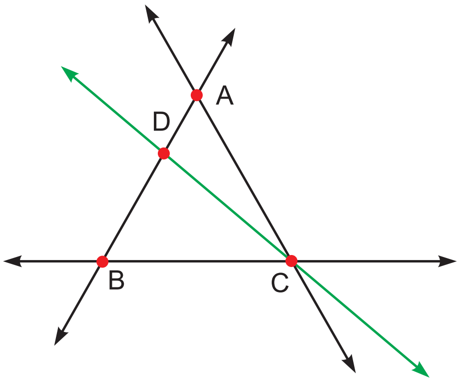
चित्र 10.41

देखें आपने कितना सीखा 10.4

1. दिए हुए चित्र 10.42 में,

   (a) संरेखीय बिन्दुओं के नाम लिखिए।

   (b) तीन संगामी रेखाओं के नाम लिखिए।



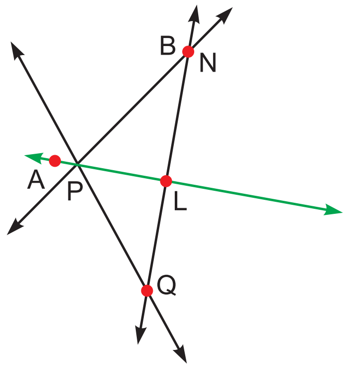
चित्र 10.42

2. दिए हुए चित्र 10.43 में,

   (a) तीन संरेखीय बिन्दुओं के नाम लिखिए।

   (b) चार संरेखीय बिन्दुओं के नाम लिखिए।

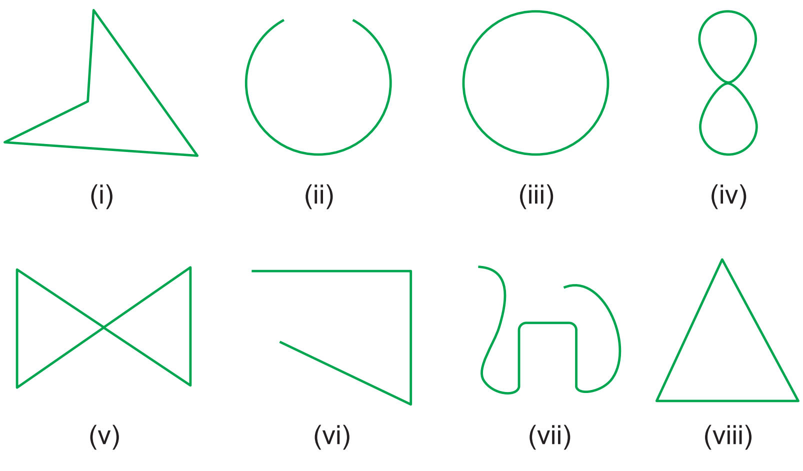
3. चित्र 10.43 में, संगामी रेखाओं के नाम लिखिए।



चित्र 10.43

10.5 खुली और बंद आकृतियां

नीचे दी आकृतियों को देखिए:



आकृति (i) के किसी बिन्दु पर अपनी पेंसिल की नोक रखिए। अब पेंसिल की नोक को इस आकृति पर किसी दिशा में चलाना प्रारंभ कीजिए। ज्ञात कीजिए कि आप बिना दिशा बदले पूरी आकृति पर चलकर क्या प्रारंभिक बिन्दु पर वापस आ पाते हैं या नहीं। आप प्रारंभिक बिन्दु पर वापस आ जाते हैं। इसलिए, इस वक्र को एक बंद आकृति कहते हैं। आकृति (ii) बंद आकृति नहीं है। इसे खुली आकृति कहते हैं। आकृतिया (iii), (iv), (v) और (viii) बंद आकृतियां (वक्र) हैं तथा आकृतियां (vi) और (vii) खुली आकृतियां (वक्र) हैं।

टिप्पणी

10.5.1 सरल आकृतियां

आकृतियों (i), (ii), (iii), (vi), (vii) और (viii) में से प्रत्येक स्वयं अपने को कहीं नहीं काटती। ऐसी सभी आकृतियां सरल आकृतियां कहलाती हैं। आकृतियां (iv) और (v) सरल आकृतियां नहीं हैं।

आकृतियां (i), (iii) और (viii) सरल बंद आकृतियां हैं।

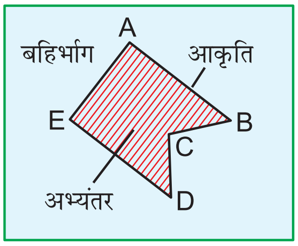
10.5.2 सरल बंद आकृतियों के अभ्यंतर और बहिर्भाग

प्रत्येक सरल बंद आकृति तल को तीन भागों में बांटती है। ये हैं:

(i) आकृति का अभ्यंतर (अंदर का भाग)

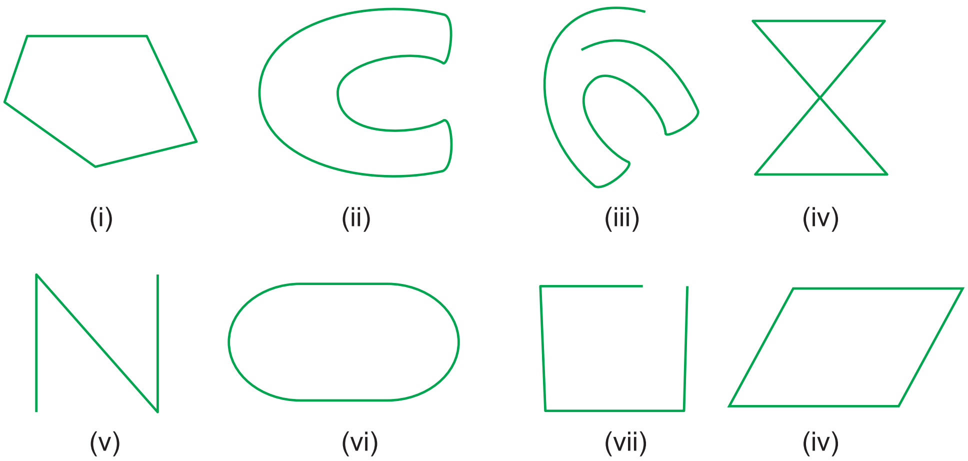
(ii) आकृति का बहिर्भाग (बाहर का भाग)

(iii) स्वयं वह आकृति।



देखें आपने कितना सीखा 10.5

1. नीचे दी आकृतियों में कौन-सी आकृतियां बंद हैं और कौन सी खुली हैं?



यह भी बताइए कि इनमें कौन-कौन सी आकृतियां सरल बंद आकृतियां हैं।

10.6 ज्यामितीय यंत्र तथा उनका प्रयोग

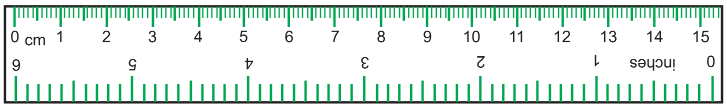
आपने ज्यामितीय बॉक्स अवश्य देखा होगा। इसमें बहुत सी चीजें होती हैं-पैंसिल, पैंसिल घड़ने वाला शार्पनर, मिटाने वाला रबड़ के अतिरिक्त इसमें निम्नलिखित यंत्र होते हैं, जिनको साधारण तौर पर ज्यामितीय आकृतियों को खींचने और इन्हें मापने के लिए प्रयोग किया जाता है :

(a) फुटा (b) डिवाइडरज (c) परकार (d) सैट स्कवेयर (e) चांदा (प्रोट्रैक्टर)

अब हम प्रत्येक के बारे में पढ़ेंगे और यह भी देखेंगे कि ज्यामितीय आकृतियों को खींचने और मापने के लिए इन्हें कैसे प्रयोग करते हैं।

10.6.1 फुटा (रूलर)

ज्यामितीय बॉक्स में एक यंत्र फुटा है। यह धातु, प्लास्टिक अथवा लकड़ी का होता है। इसके किनारे सीधे और समांतर होते हैं। यह फुटा साधारण तौर पर या तो 6 इंच (15.25 सेमी लगभग) या 12 इंच (30.5 सेमी लगभग) की लंबाई का होता है। इसका एक किनारा इंचों को और दूसरा सेमी को दर्शाता है। प्रत्येक इंच तथा सेमी को फुटे पर दस समान भागों में बांटा होता है। फुटे पर चिह्नों को माप-चिह्न कहते हैं और इसलिए फुटे को माप चिन्हित फुटा भी कहते हैं।



चित्र 10.44

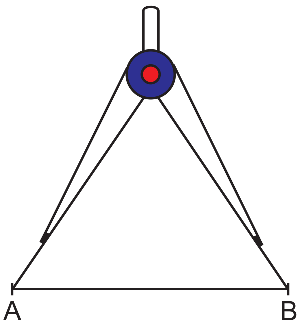
(i) दो दिए गए बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड की रचना के लिए,

(ii) दी गई लंबाई के माप के रेखाखंड की रचना के लिए,

(iii) रेखाखंड को मापने के लिए

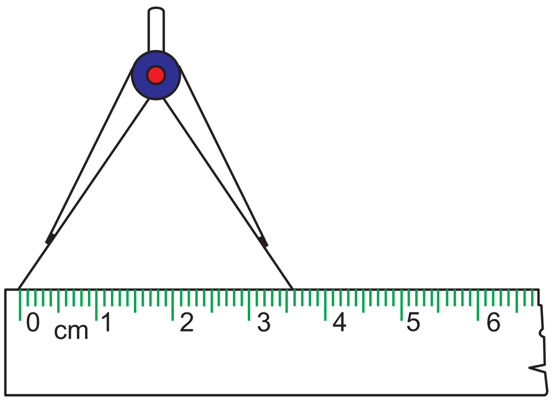
(iv) यह देखने के लिए कि रेखा सीधी है अथवा नहीं, फुटे का प्रयोग किया जाता है।

10.6.2 डिवाइडरज



चित्र 10.45

दिए हुए रेखाखंड की लंबाई मापने के लिए डिवाइडरज का प्रयोग करते हैं। रेखाखंड AB को मापने के लिए डिवाइडरज की एक भुजा की नोक को बिन्दु A पर और दूसरी भुजा की नोक को बिन्दु B पर रखते हैं, जैसा कि चित्र 10.45 में दिखाया गया है। नोकों के बीच की दूरी को बिना छेड़े (बदले), डिवाइडरज की एक नोक को फुटे के शून्य चिह्न पर रखते हैं और दूसरी नोक को फुटे के किनारे के साथ रखते हैं। नोट कीजिए कि दूसरी नोक फुटे पर अंकित किस चिह्न के ऊपर है (चित्र 10.46 में देखिए कि यह 3.6 सेमी चिह्न को छूती है)। दो नोकों के नीचे की दूरी, जो फुटे के बिन्दुओं पर अंकों का अंतर है, रेखाखंड की लंबाई है। चित्र 10.46 के अनुसार, रेखाखंड AB की लंबाई 3.6 सेमी है।



चित्र 10.46

10.6.3 परकार

परकार कहलाने वाला यंत्र डिवाइडरज जैसा ही होता है। इसकी एक भुजा तो डिवाइडरज की भुजा ही है और दूसरी भुजा में पैंसिल को जकड़े रखने के लिए एक पेंच लगा होता है।

परकार द्वारा किसी रेखाखंड को मापने के लिए वही तरीका अपनाना होगा, जैसा आपने डिवाइडरज के संदर्भ में अपनाया था।

साधारण तौर पर परकार का प्रयोग निम्नलिखित क्रियाओं के लिए करते हैं–

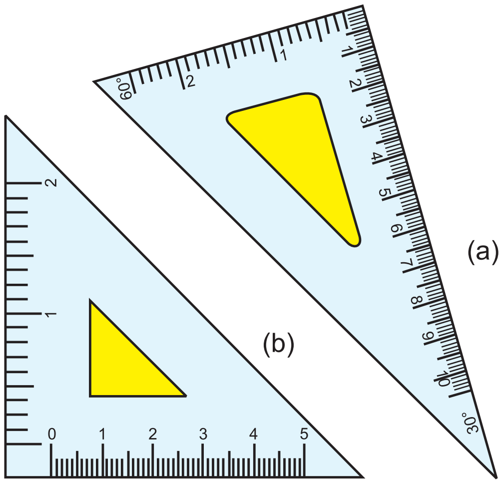
(i) रेखाखंड को मापने के लिए।

(ii) विभिन्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों की रचना के लिए।

(iii) विभिन्न मापों के कोणों की रचना करना। इसमें हमें फुटे का भी प्रयोग करना होगा।

10.6.4 सेट स्कवेयर

ज्यामितीय बक्स में दो त्रिभुजाकार यंत्र हैं। इन्हें सेट स्कवेयर कहते हैं (चित्र 10.47 देखिए)। यह भी साधारण रूप में धातु, प्लास्टिक अथवा लकड़ी के बने होते हैं। सेट स्कवेयर, चित्र (a) में, के किनारों के बीच के कोण 90°, 60° तथा 30° के हैं। इसी प्रकार, चित्र (b) में सेट स्कवेयर के किनारों के बीच के कोण 90°, 45°, 30° के हैं। दोनों सेट स्कवेयर के लंबवत् किनारे माप चिन्हित हैं। इनमें से एक किनारे पर इंच और दूसरे पर सेमी अंकित हैं। यह ठीक इसी प्रकार है, जैसा फुटे के संदर्भ में था। कई प्रयोजनों के लिए सेट स्कवेयर का प्रयोग कर सकते हैं, जैसे:



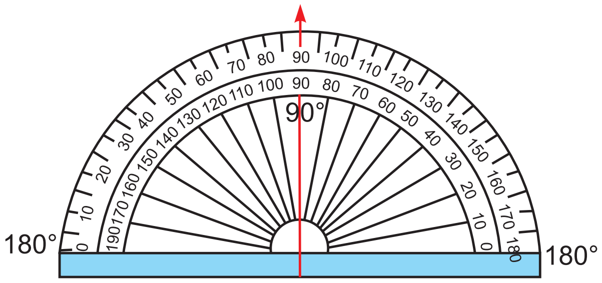
चित्र 10.47

(i) 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 105° इत्यादि के माप के कोणों की रचना के लिए।

(ii) समांतर तथा लंबवत रेखाओं की रचना के लिए।

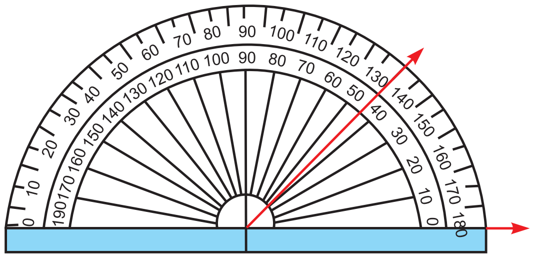
10.6.5 चांदा (प्रोट्रैक्टर)

चांदा, ऐसा यंत्र है, जिसे कोणों को मापने के लिए प्रयोग में लाते हैं अथवा दिए हुए माप के कोण की रचना के लिए भी इसका आकार अर्द्धवृत्तीय होता है और साधारणतया धातु अथवा प्लास्टिक का बना होता है। इसके वक्रीय किनारे (अर्द्धवृत्तीय वक्र) (चित्र 10.48 देखें) पर माप चिह्न अंकित होते हैं। यह चिह्न अर्द्धवृत्तीय किनारे को 180 समान भागों में बांटते हैं और इन भागों को 0° से 180° तक अंकित किया होता है। यह क्रिया दोनों विपरीत दिशाओं में होती है। यह चिह्न साधारणतया 10° के अंतर पर होते हैं और 0° और 180° तक दोनों विपरीत दिशाओं मे होते हैं, जैसा चित्र 10.48 में दिखाया गया है। सीधे किनारे के मध्य बिन्दु को प्रोट्रैक्टर का केंद्र भी कहते हैं। वह रेखा, जो केंद्र से होकर जाती है, 0° से 180° तक, उसे आधार रेखा कहते हैं।



चित्र 10.48

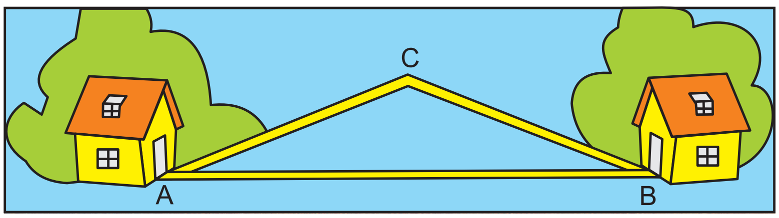
किसी कोण को मापने के लिए प्रोट्रैक्टर को इस प्रकार रखिए कि इसका केंद्र कोण के शीर्ष बिन्दु पर आ जाए तथा 0° कोण की एक भुजा पर आए। वक्रीय किनारे पर वह चिह्न पढ़िए, जिस पर कोण की दूसरी भुजा आए। यह संख्या हमें कोण का माप देगी। चित्र में कोण की माप 45° है। इस विधि को पूर्ण विस्तार से कोणों के पाठ 11 में समझाया जाएगा।



चित्र 10.49

10.7 रेखाखंड की माप

एक स्थान से दूसरे स्थान जाते समय हम कम से कम दूरी वाला रास्ता तय करना चाहते हैं।



चित्र 10.50

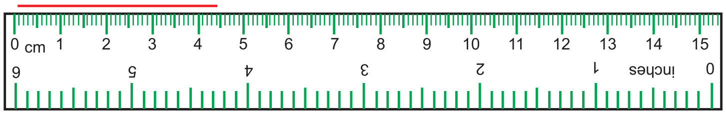
ऊपर चित्र 10.50 में स्थान A से स्थान B जाने के लिए दो भिन्न-भिन्न रास्ते हैं। एक सीधा A से B तथा दूसरा पहले A से C और फिर C से B। A से सीधा B वाला रास्ता सबसे छोटा है।

दो बिन्दुओं A व B के बीच की सबसे छोटी दूरी रेखाखंड AB की लंबाई कहलाती है।

किसी रेखाखंड की लंबाई, एक उपयुक्त पैमाने को उपयोग कर मापी जा सकती है।

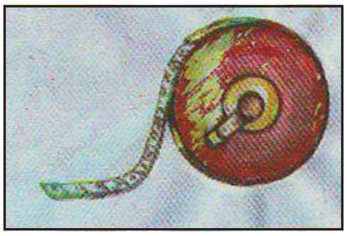
टिप्पणी

छोटी–छोटी दूरी मापने के लिए हम छोटा पैमाना जैसा आपके ज्यामिति बक्स में होता है, प्रयोग करते हैं।



चित्र 10.51

बड़ी अथवा बहुत लंबी दूरी मापने के लिए, जैसे–मैदान, भूखंड, हम मापने वाला फीता प्रयोग करते हैं।



चित्र 10.52

किसी भी प्रकार के माप के लिए हमें एक उपयुक्त इकाई की आवश्यकता होती है। छोटी लंबाई अथवा दूरी मापने के लिए हम सेंटीमीटर व मिलिमीटर इकाइयां प्रयोग करते हैं, जबकि बड़ी अथवा लंबी दूरी मापने के लिए मीटर व किलोमीटर इकाइयां प्रयोग की जाती हैं।

लंबाई की छोटी-बड़ी इकाइयों में परस्पर संबंध इस प्रकार हैं:

इकाई	संकेत	संबंध
किलोमीटर	किमी	
हेक्टोमीटर	हेमी	10 हेमी = 1 किमी
डेकामीटर	डेका	10 डेका = 1 हेमी
मीटर	मी	10 मी = 1 डेका
डेसीमीटर	डेसी	10 डेसी = 1 मी
सेंटीमीटर	सेमी	10 सेमी = 1 डेसी
मिलीमीटर	मिमी	10 मिमी = 1 सेमी

अब क्या आप बता सकते हैं कि 1 किलोमीटर में कितने मीटर होते हैं?

तालिका देखकर स्वयं बता सकते हो कि 1 किलोमीटर = 10 हेमी

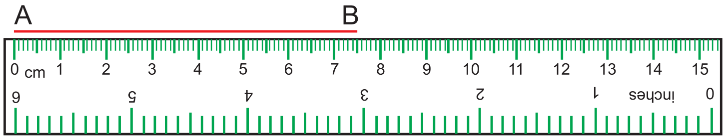
= 10 × 10 डेकामी = 100 डेकामी   1 हेमी = 10 डेका

= 100 × 10 मीटर = 1000 मीटर   तथा 1 डेकामी = 10 मीटर

इसी प्रकार, 1 मीटर = 100 सेमी

10.8 पैमाने का प्रयोग कर किसी रेखाखंड की माप

उदाहरण 10.1 : किसी दिए गए रेखाखंड AB का माप हम निम्न चरणों में करते हैं:



चित्र 10.53

चरण 1: एक पैमाना लेकर उसके किनारे को रेखाखंड के साथ मिलाकर इस प्रकार रखते हैं कि इसका शून्य A पर हो।

चरण 2: अब B के सम्मुख पैमाने पर अंकित चिह्न पूरे सेंटीमीटर व पूरे मिलिमीटर पढ़ लेते हैं।

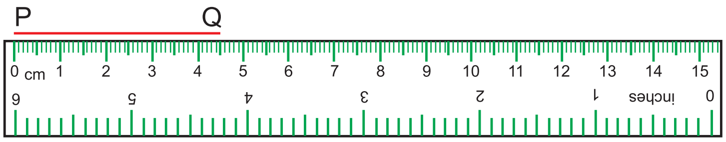
इस प्रकार रेखाखंड AB का माप हुआ

7 सेमी 5 मि.मीटर अथवा 7.5 सेमी

10.9 पैमाने का प्रयोग कर एक दिए गए माप के रेखाखंड की रचना करना

पैमाने का प्रयोग कर हम दिए गए माप के एक रेखाखंड की रचना भी कर सकते हैं।

एक रेखाखंड PQ = 4.5 सेमी की रचना हम निम्न चरणों में करेंगे :



चित्र 10.54

चरण 1: कागज पर एक बिन्दु P अंकित कीजिए और पैमाने पर कागज पर इस प्रकार रखिए कि उसका शून्य बिन्दु P पर संपाती हो।

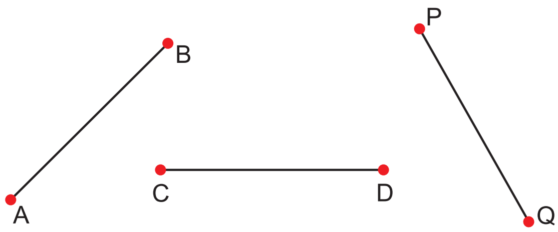
चरण 2: अब पैमाने पर 4.5 सेमी अर्थात् 4 सेमी 5 मि.मीटर का चिह्न पढ़िए और उसके सम्मुख बिन्दु Q अंकित कीजिए।

चरण 3: पैमाने के किनारे के साथ-साथ पेंसिल चलाते हुए बिन्दु P को बिन्दु Q से मिलाइए।

इस प्रकार प्राप्त रेखाखंड PQ अभीष्ट रेखाखंड है, जिसकी माप 4.5 सेमी है।

देखें आपने कितना सीखा 10.6

1. पैमाने की सहायता से निम्न रेखाखंडों को मापिए:



चित्र 10.55

टिप्पणी

2. एक कागज पर दो रेखाखंड PQ व RS खींचिए और उनकी माप भी ज्ञात कीजिए।
3. अपनी गणित की पुस्तक की लंबाई व चौड़ाई माप कर लिखिए।
4. दिए गए माप वाले रेखाखंडों की रचना कीजिए।

   (i) AB = 7.2 सेमी (ii) PQ = 6 सेमी 5 मि.मीटर
5. मापने वाले फीते की सहायता से एक कमरे की लंबाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

आइए दोहराएं

- बिन्दु, रेखा व तल ऐसी अवधारणाएं हैं, जिनकी परिभाषा नहीं है। इन्हें उदाहरणों द्वारा भली-भांति समझ लेना आवश्यक है और इनके आपसी संबंधों को भी।
- एक रेखाखंड, रेखा का केवल एक भाग है, जिसके दोनों ओर अंत बिन्दु होते हैं और इसकी लंबाई भी निश्चित होती है।
- एक किरण भी रेखा का एक भाग है, जिसमें एक अंत बिन्दु या आरंभिक बिन्दु होता है और यह केवल एक ओर अनंत लंबाई की होती है।
- रेखा की लंबाई दोनों ओर अनंत होती है।
- दो बिन्दुओं में से होती हुई एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।
- तल एक सम सतह होती है, जिसका विस्तार हर दिशा में अनंत होता है।
- एक ही तल में दो रेखाएं

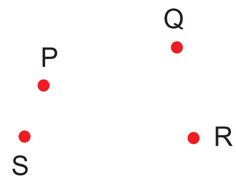
  (i) प्रतिच्छेदी अथवा (ii) समांतर अथवा (iii) संपाती हो सकती हैं।
- यदि तीन या अधिक बिन्दुओं में, सभी में गुजरती हुई एक रेखा खींची जा सके तो बिन्दु संरेखीय होते हैं।
- एक ही तल में तीन या अधिक रेखाएं यदि एक ही बिन्दु में से गुजरती हों तो वे संगामी रेखाएं कहलाती हैं।
- एक सरल बंद आकृति तल को तीन भागों में बांटती है-अभ्यंतर, बहिर्भाग और स्वयं वह आकृति।

आइए अभ्यास करें

1. दिए गए चित्र 10.56 में,

   (a) बिन्दुओं के विभिन्न युग्म लेकर कितना विभिन्न रेखाएं खींची जा सकती हैं? उनके नाम भी लिखिए।

   (b) उन रेखाओं में संगामी रेखाएं भी बताइए।



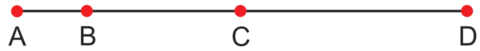
चित्र 10.56

2. तीन बिन्दुओं में से होती हुई कितनी रेखाएं खींची जा सकती हैं–

   (a) यदि वे संरेखीय हों।

   (b) यदि वे संरेखीय न हों।

3. चित्र 10.57 में चार संरेखीय बिन्दु A, B, C तथा D हैं। इनसे बनने वाले सभी रेखाखंडों के नाम लिखिए।



चित्र 10.57

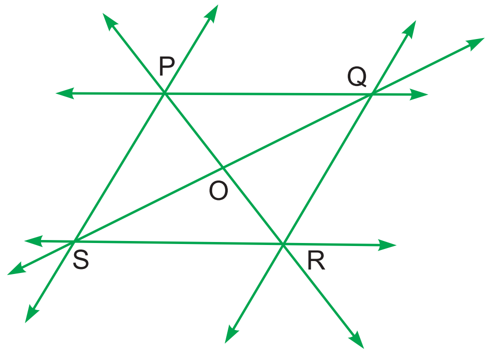
4. दिए गए चित्र 10.58 को देखकर नाम लिखिए:

(a) समांतर रेखाओं के एक युग्म का

(b) प्रतिच्छेदी रेखाओं के एक युग्म का

(c) तीन संगामी रेखाओं के

(d) तीन संरेखीय बिन्दुओं के



चित्र 10.58

5. कागज पर एक बिन्दु L अंकित कीजिए और फिर

   (a) तीन और बिन्दु M, N तथा O इस प्रकार अंकित कीजिए कि सभी बिन्दु संरेखीय हों।

   (b) चार रेखाएं इस प्रकार खींचिए की सभी रेखाएं संगामी हों।

6. कागज पर एक बिन्दु E लीजिए और फिर

   (a) बिन्दु E से आरंभ होती हुई तीन किरणें बनाइए।

   (b) इस प्रकार आपको कितनी किरणें प्राप्त होती हैं?

7. सरल बंद आकृति तल को कितने भागों में बांटती है?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 10.1

1. (a) धूल कण तथा पुस्तक का कोना (b) पुस्तक का किनारा तथा खींचा तार आदि

   (c) कमरे का फर्श तथा मेज की सतह

2. (a) बिन्दु (b) तल (c) रेखा (d) अनंत

   (e) बिन्दु (f) दो (g) अनंत (h) उस तल

3. AB, BC, AC, BA, CB तथा CA (कोई तीन)

4. BO या OB ; QP या PQ ; LN या NL ; हां

5. अनंत

देखें आपने कितना सीखा 10.2

1. (a) निश्चित (b) दो (c) प्रारंभिक (d) अनंत
   (e) एक

2. (a) AB, BC अथवा AC (b) BA तथा BC

3. (a)

चित्र 10.59

(b)

चित्र 10.60

4. (a) AP, RP, RQ (b) AB, AD, AC, BC, BD तथा DC

5. OB तथा OE ; OC तथा OF ; OD तथा OA

देखें आपने कितना सीखा 10.3

1. (a) नहीं (b) एक (c) संपाती (d) प्रतिच्छेदी

2. (a) (i) m व p (ii) l व q
   (b) (i) m व l (ii) p व q (iii) l व p (iv) m व v

3. समांतर रेखाएं

4. (a) AD तथा BC
   (b) AB तथा BC ; BC तथा AC, AD तथा AB, AC तथा AD (कोई दो)

5. (a) अनंत, नहीं (b) केवल एक (c) एक अथवा कोई नहीं

देखें आपने कितना सीखा 10.4

1. (a) A, D व B (b) AC, DC तथा BC

2. (a) A, P तथा B   (b) B, N, L तथा Q

3. AL, NP और PQ

देखें आपने कितना सीखा 10.5

1. बंद : (i), (ii), (iv), (vi) और (viii)

   खुली : (iii), (v), और (vii)

   सरल बंद : (i), (ii), (vi) और (viii)

आइए अभ्यास करें

1. (a) छः; PQ, QR, RS, SP, PR तथा SQ

   (b) QP, QS तथा QR, SP, SQ तथा SR, PS, PQ तथा PR और RS, RQ तथा RP

2. (a) केवल एक   (b) एक भी नहीं

3. AB, AC, AD, BC, BD तथा CD

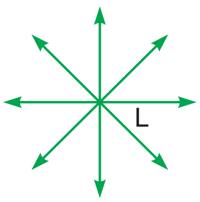
4. (a) PQ व SR ; SP व RQ

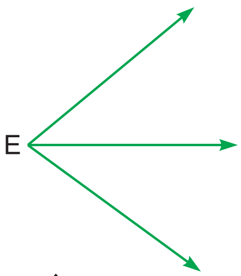
   (b) PQ व PS ; QP व QR ; QR व SQ आदि

   (c) PQ, PR व PS ; QP, QR व QS ; SP, SQ व SR ; RP, RQ व RS

   (d) S, O व Q ; P, O व R

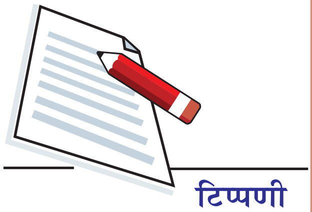
5. (a) 

   (b) 

6. (a) 

   (b) अनंत

7. तीन

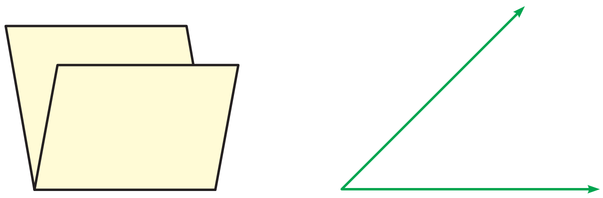


11

कोण एवं समांतर रेखाएँ

क्या आपने घड़ी देखी है, जो दिनभर समय देखने में सहायता करती है। घड़ी में घंटों के निशानों को हम कैसे लगाते हैं?

पिछले पाठ में आपने ज्यामिति आकृतियों, जैसे-बिन्दु, तल तथा रेखाओं के विषय में पढ़ा है। इस पाठ में, आप कोणों के विषय में पढ़ेंगे।



चित्र 11.1(i)

दो तलों अथवा रेखाओं के आपस में काटने पर बनने वाली आकृतियां कोण कहलाती हैं। हमारे आस-पास का पर्यावरण विभिन्न प्रकार के कोणों से भरा हुआ है। विभिन्न प्रकार की आकृतियों को बनाने के लिए हमें कोणों के विषय में जानना होगा।

एक पुस्तक, नोट बुक अथवा मेज के आमने-सामने के किनारों को देखिए। आप देखेंगे कि इन सभी के लिए आमने-सामने के किनारों के बीच लम्बवत् दूरी समान है।

अब आप एक रुलर (अथवा फुटा) एक कागज के पन्ने पर रखिए तथा इसके लम्बे सिरे के दोनों ओर रेखाएं खींचिए।

चित्र 11.1(ii)

आप देखेंगे कि इनके बीच की लम्बवत् दूरी सदा समान है। इन रेखाओं को **समांतर रेखाएं** कहते हैं।

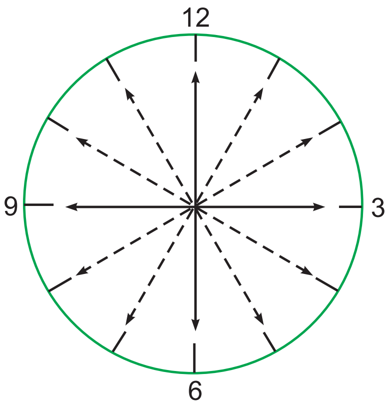
रेल की दो सीधी पटरियां भी समांतर रेखाओं का एक उदाहरण हैं।

इस पाठ से आप सीखेंगे कि

- कोण क्या है?
- कोण को किस प्रकार लिखा तथा नामांकित करना है?
- विभिन्न प्रकार के कोणों के विषय में
- विभिन्न प्रकार के कोणों में संबंध
- कोणों को किस प्रकार मापा जाता है?
- समांतर रेखाओं के गुण-धर्म
- किसी दी गई रेखा के समांतर अथवा लम्बवत एक रेखा खींचना

11.1 घूर्णन (Rotation)

यह जानने से पहले कि कोण क्या है, हमें घूर्णन के विषय में जानना होगा। आपने घड़ी की सुइयों, कुम्हार के चाक तथा गांव के मेले में बड़े झूले को चलते देखा होगा। यह घूर्णन के उदाहरण हैं।



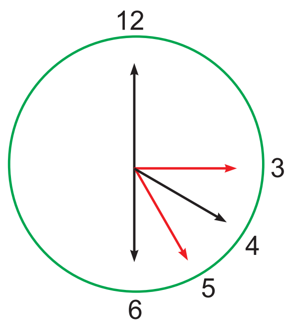
चित्र 11.2

आप अपने विचारों को घड़ी की चलती मिनट की सूई पर केंद्रित करें (चित्र 11.2 देखिए)। मिनट की सुई का अगला हिस्सा घूमकर 12 से चलकर 3 पर पहुंचता है, फिर 6 पर, फिर 9 पर और अंत में फिर 12 पर पहुंचता है। हम कहते हैं कि उसने एक पूरा चक्कर लगा लिया है। 6 पर पहुंचने पर उसने आधा चक्कर तथा उससे पहले 3 पर पहुंचने पर केवल ¼ अथवा चौथाई चक्कर पूरा किया था।

चित्र 11.3

दूसरे उदाहरण के रूप में (चित्र 11.3 में) मान लीजिए कि आप ग्राउंड में सुबह पूर्व की ओर मुंह करके व्यायाम के लिए खड़े हैं। अगर आप अपने सीधे हाथ की ओर एक-चौथाई चक्कर घूम जाएं तो आपका मुंह किस दिशा की ओर होगा? दक्षिण की ओर, ठीक है या नहीं? कितने चौथाई चक्कर आपको फिर घूमने पड़ेंगे कि आपका मुंह फिर पूर्व की ओर हो जाए। अगर आप आधा चक्कर घूमें तो आप उल्टी दिशा अर्थात् पश्चिम की ओर मुंह किए खड़े होंगे। अब अगर आप इसके बाद पूरा चक्कर घूमें तो आपका मुंह पूर्व की ओर नहीं होगा।

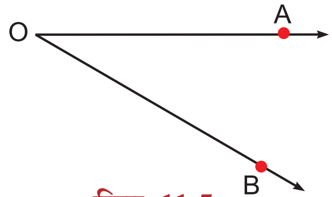
परंतु केवल पूरा चक्कर, आधा चक्कर अथवा चौथाई चक्कर की संकल्पना सब प्रकार के घूर्णनों के विषय में जानकारी देने में असमर्थ है। उदाहरणतया, चित्र 11.4 में हमें मिनट की सुई की सहायता से 4.00 बजे तथा 4.25 बजे के बीच का समय दिखाना है। हम ऊपर बताए गए चक्करों द्वारा यह करके नहीं दिखा सकते।



चित्र 11.4

हमें इसके अतिरिक्त भी चक्करों के एकक, जो पूर्ण एकक के अतिरिक्त है, के विषय में जानना होगा। पर यह कहने से पहले हमें कोण को घूर्णन के मापन के विषय में बताना पड़ेगा।

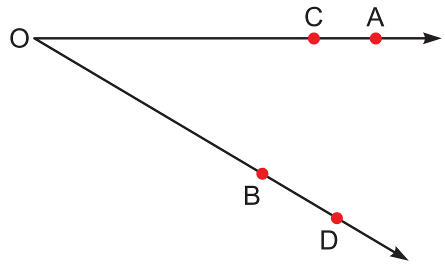
11.2 कोण



चित्र 11.5

चित्र 11.5 को देखें। इसमें दो किरण OA तथा OB हैं, जिनका एक ही प्रारंभिक बिन्दु O है। आप इसे किरण OA को O के गिर्द घुमाकर प्राप्त कर सकते हैं, जबकि यह OB पर आकर आत्मसात हो जाए अथवा किरण OB को O के गिर्द घुमाकर तथा OA तक पहुंचकर प्राप्त कर सकते हैं। चित्र 11.5 में दी गई आकृति को कोण कहते हैं। हम इसे ∠AOB अथवा ∠BOA का नाम देते हैं (चिह्न ∠ का प्रयोग हम कोण AOB अथवा कोण BOA को लिखने में करते हैं)

एक कोण को लिखने के लिए हम चिन्ह ∠ का प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिए कोण AOB को ∠AOB लिखते हैं।

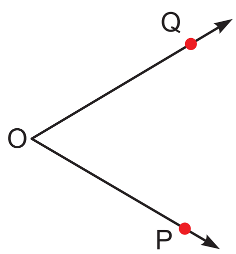


चित्र 11.6

पहली प्रकार घूर्णन दक्षिणावर्त (Clockwise) है तथा दूसरी प्रकार में यह वामावर्त (anticlockwise) है। इस प्रकार एक कोण को हम घूर्णन के रूप में ले सकते हैं।

यदि हम कोण AOB को बनाने वाली किरणों पर बिन्दु C तथा D लें (चित्र 11.6) तो इस कोण को हम ∠COD का नाम भी दे सकते हैं।

अत: ∠AOB, ∠COD, ∠AOD तथा ∠COB एक ही कोण के नाम हैं। उसी कोण को हम ∠BOA, ∠DOC, ∠DOA तथा ∠BOC का नाम भी दे सकते हैं। दोनों किरणों के प्रारंभिक बिन्दु O को कोण का शीर्ष तथा किरणों OA तथा OB को उसकी भुजाएं कहते हैं।



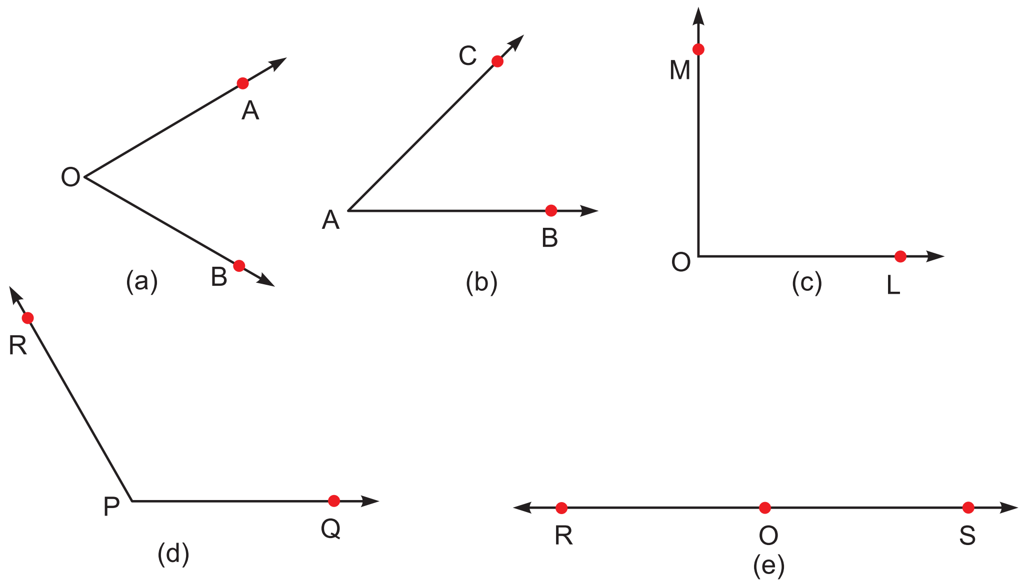
चित्र 11.7

एक कोण खींचने के लिए हमें दो ऐसी किरणें खींचनी हैं, जिनका एक ही (Common) प्रारंभिक बिन्दु हो। उदाहरण के लिए, OP तथा OQ दो किरणें खींची गई हैं, जिनका एक ही प्रारंभिक बिन्दु O है (चित्र 11.7)। इनसे हमें कोण POQ अथवा कोण QOP प्राप्त हुआ।

देखें आपने कितना सीखा 11.1

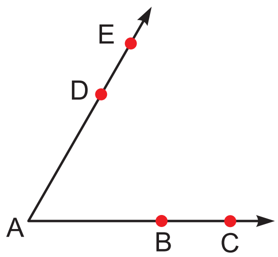
1. निम्नलिखित को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:
   (a) दक्षिण से उत्तर तक का घूर्णन .... है।
   (b) दक्षिण से दक्षिण तक का घूर्णन .... है।
   (c) पश्चिम से दक्षिण तक का घूर्णन .... है।
   (d) घड़ी की मिनट की सुई का 4 से 10 तक घूर्णन .... है।
   (e) घड़ी की घंटों की सूई का 2.00 बजे अपराह्न से 5.00 बजे अपराह्न तक का घूर्णन .... है।

2. नीचे दिए गए चित्रों में कोणों के नाम लिखिए:



चित्र 11.8

3. नीचे दिए गए कोण के, सभी संभव नाम लिखिए।



चित्र 11.9

4. ∠POQ, ∠PQR, ∠LMN तथा ∠RST के शीर्ष तथा भुजाओं के नाम लिखिए।

5. निम्न शीर्ष तथा भुजाओं वाले कोण बनाइए:

	शीर्ष	भुजाएं (किरणें)
(a)	P	PQ तथा PQ
(b)	M	MA तथा MB
(c)	O	OX तथा OY

6. निम्न को दर्शाने वाले कोण बनाइए:

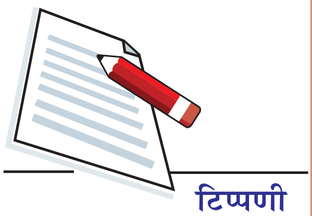
(a) आधा घूर्णन

(b) चौथाई घूर्णन

(c) चौथाई घूर्णन से कम

(d) चौथाई घूर्णन से अधिक

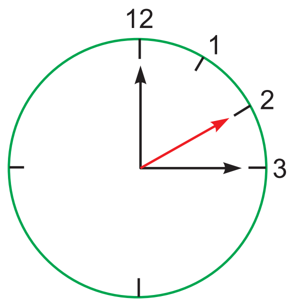
उनके नाम भी लिखिए।



टिप्पणी

11.3 कोणों की माप

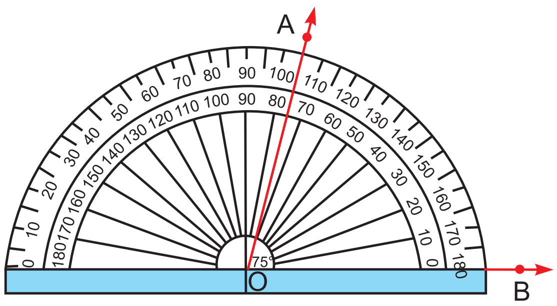
स्मरण कीजिए कि भूमिका में आपने आधे तथा चौथाई घूर्णन के विषय में सीखा था तथा यह भी देखा था कि कोण की माप के लिए कोई अन्य एकक भी लेना चाहिए। उसे हम इस खंड में सीखेंगे। आइए दोपहर 2 बजे हम घड़ी की सुइयों के बीच कोण को देखें। इसे हम एक चौथाई घूर्णन के रूप में नहीं माप सकते, जो कोण घड़ी की सुइयों के बीच 3 बजे दोपहर होगा। हम चौथाई घूर्णन वाले कोण को 90 समान भागों में बांटकर तथा एक भाग को एकक के रूप में मापते हैं। इसे हम डिगरी (अंश) कहते हैं। अत: चौथाई घूर्णन 90° दर्शाता है। इसे 90 अंश पढ़ा जाता है तथा 90 के ऊपर ° (अंश के प्रतीक के रूप में) लगाकर लिखा जाता है। क्या अब आप अनुमान लगा सकते हैं कि 2.00 बजे दोपहर घड़ी की सुइयों के बीच कितना कोण (अंश में) होगा? क्या यह 60° नहीं है? इसी प्रकार 1 बजे यह कोण 30° होगा।



चित्र 11.10

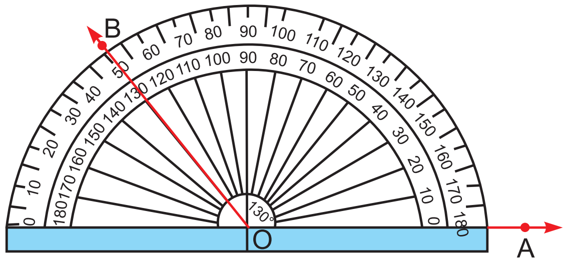
आप अब आसानी से देख सकते हैं कि 5 बजे घड़ी की सुइयों के बीच 150° का कोण होगा। 4 बजे यह 120° होगा तथा 6 बजे 180°। अत: आधे घूर्णन का अंश माप 180° है।

आपके ज्यामिति बॉक्स में, अर्धचन्द्राकार रूप का एक कोणमापक है, जिसे चांदा कहते हैं। अर्धवृत्त को 180 समान भागों में बांटा जाता है। चांदे पर इन भागों को 0 से 180 द्वारा अंकित किया जाता है–दक्षिणावर्त तथा वामावर्त दोनों ओर (देखिए चित्र 11.11) चांदे पर अंकित प्रत्येक चिन्ह 1° का कोण दर्शाता है। चांदे के चित्र में खींची मोटी रेखा आधार रेखा कहलाती है तथा उसका मध्य बिन्दु X केंद्र कहलाता है। किसी कोण को डिग्री में मापने के लिए, हम X को कोण के शीर्ष पर रखते हैं तथा आधार रेखा, कोण की एक किरण के ऊपर रखते हैं। कोण की दूसरी किरण चांदे पर अंकित जिस अंक की ओर संकेत देगी, वही उस कोण का अंश माप है। अत: चित्र 11.11 में, ∠AOB का अंश माप 75° है।



चित्र 11.11
चाँदा

इसी प्रकार, यदि हमें 130° का कोण बनाना है तो हम एक किरण OA खींचते हैं। हम चांदे को इस प्रकार रखते हैं कि बिन्दु O बिन्दु X पर आ जाए तथा आधार रेखा OA के साथ समाहित हो जाए। हम 130° के अंकित अंक पर बिन्दु O लगाकर उसे B से मिला देते हैं। ∠AOB का माप अब 130° है।



चित्र 11.12

11.4 कोणों को बनाना

निम्न खंड में हम सीखेंगे कि हम फुटे (Ruler) तथा परकार की सहायता से कुछ विशेष माप-60°, 120°, 30° तथा 90° के कोण कैसे बनाते हैं।

11.4.1: 60° का कोण बनाना

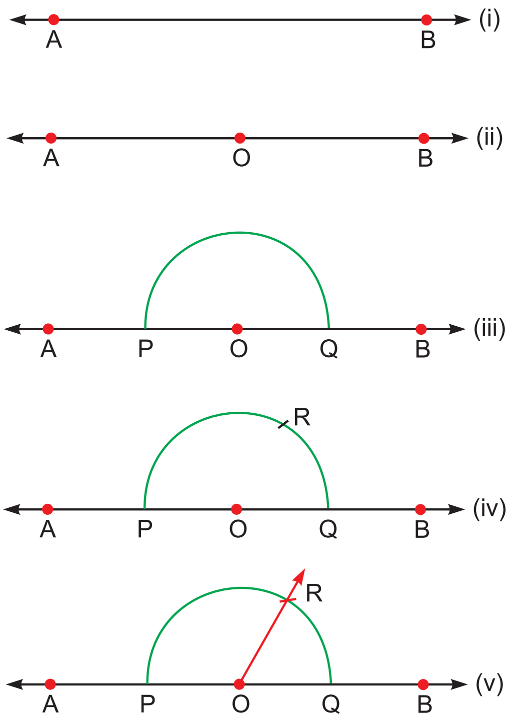
पद 1 : फुटे की सहायता से एक रेखा AB खींचिए (चित्र 11.13(i))।

पद 2 : उस रेखा पर एक बिन्दु O लीजिए (चित्र 11.13(ii))।

पद 3 : एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर तथा O को केंद्र मानकर एक अर्धवृत्त बनाइए जो AB रेखा को P तथा Q पर काटे (चित्र 11.13(iii))।

पद 4 : Q को केंद्र मानकर तथा वही त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए, जो अर्धवृत्त को बिन्दु R पर काटे (चित्र 11.13(iv))।

पद 5 : OR को मिलाकर बढ़ाइए। तो ∠QOR, 60° के माप का वांछित कोण है (चित्र 11.13(v))।



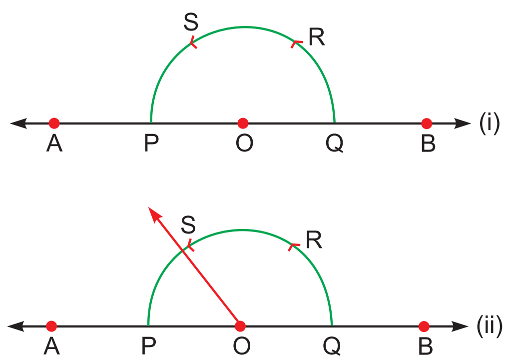
चित्र 11.13

11.4.2: 120° का कोण बनाना

पद (1-4) : उपरोक्त में दिए एक से चार तक के पद दोहराइए।

पद 5 : R को केंद्र मानकर तथा वही त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए, जो अर्धवृत्त को S पर काटे (चित्र 11.14 (i))।

पद 6 : OS को मिलाकर बढ़ाइए। तो ∠QOS 120° के माप का वांछित कोण है (चित्र 11.14(ii))।

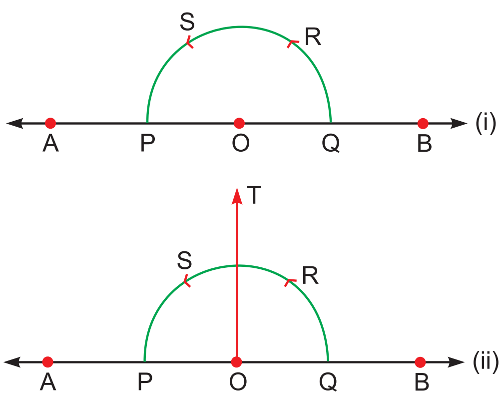


चित्र 11.14

11.4.3: 90° का कोण बनाना

पद (1-5) : 120° का कोण बनाने वाले (1-5) तक के पदों को दोहराइए।

पद 6 : R को केंद्र मानकर तथा एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए (चित्र 11.15 (i))।



चित्र 11.15

पद 7 : S को केंद्र मानकर तथा वही त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप लगाइए, जो पहले वाली चाप को बिन्दु T पर काटे।

पद 8 : O तथा T को मिलाकर बढ़ाइए। तो ∠BOT, 90° का वांछित कोण है (चित्र 11.15(ii))।

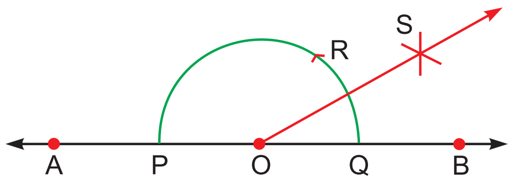
11.4.4: 30° का कोण बनाना

पद 1-4 : 60° का कोण बनाने वाले (1-4) पद दोहराइए।

पद 5 : Q को केंद्र मानकर तथा एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए।

पद 6 : R को केंद्र मानकर तथा वही त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए, जो पहली चाप को S पर काटें।

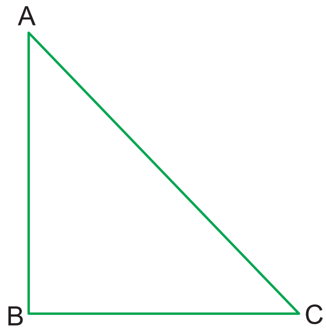
पता 7 : O तथा S को मिलाकर बढ़ाइए। तो ∠BOS, 30° के माप का वांछित कोण है। (चित्र 11.16)।



चित्र 11.16

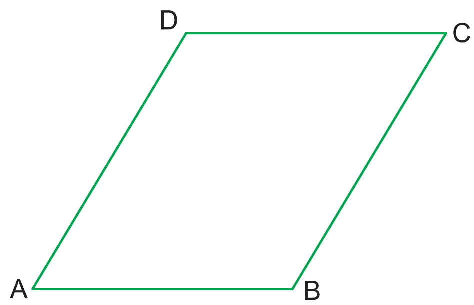
देखें आपने कितना सीखा 11.2

1. चांदे का प्रयोग करके निम्न द्वारा प्रदर्शित कोण बनाइए:
   (a) एक-चौथाई घूर्णन
   (b) आधा घूर्णन
2. चांदे का प्रयोग करके निम्न कोण बनाइए:
   (a) 40° (b) 70° (c) 90°
   (d) 110° (e) 150° (f) 180°
3. चित्र 11.17 में दिए गए कोणों BAC, ABC तथा BCA को चांदे की सहायता से मापिए।



चित्र 11.17

4. चांदे का प्रयोग करके चित्र 11.18 में दिए ∠DAB तथा ∠DCB को मापिए। कोण ABC तथा कोण CDA को भी मापिए।
5. फुटे (Ruler) तथा परकार की सहायता से 150° का कोण बनाइए।



चित्र 11.18

11.5 कोणों के प्रकार

समकोण : स्मरण कीजिए कि दिन के तीन बजे घड़ी में घंटे की सुई 3 पर तथा मिनट की सुई 12 पर होती है। मिनट की सुई घंटे की सुई के सीधे ऊपर खड़ी होती है। मिनट की सुई घंटे की सुई के सीधे ऊपर खड़ी होती है। इसी प्रकार से आपके कमरे की प्रत्येक दीवार फर्श

पर सीधी ऊपर खड़ी होती है। सीधे खड़े होने पर आप फर्श से 90° का कोण बनाते हैं। यह सभी 90° के कोण के उदाहरण हैं। ऐसे कोण को समकोण कहते हैं।

90° के कोण को समकोण कहते हैं।

न्यून कोण : वह कोण, जिसकी अंश माप 90° से छोटी होती है तथा 0° से बड़ी होती है, न्यून कोण कहलाता है।

अधिक कोण : वह कोण, जिसकी अंश माप 90° से बड़ी होती है तथा 180° से कम होती है, अधिक कोण कहलाता है।

सरल कोण : वह कोण, जिसकी अंश माप 180° होती है, सरल कोण कहलाता है।

आप देखेंगे कि सरल कोण आधा घूर्णन दर्शाता है। सरल कोण की दोनों किरणें एक रेखा पर स्थित होती हैं, लेकिन विपरीत दिशाओं में।

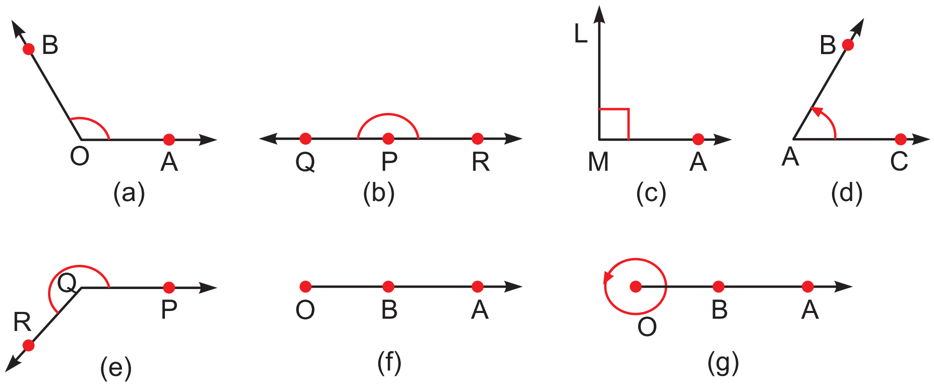
प्रतिवर्ती कोण : वह कोण, जिसकी अंश माप 180° से अधिक और 360° से कम होती है, प्रतिवर्ती कोण कहलाता है।

संपूर्ण कोण : वह कोण, जिसकी अंश माप 360° होती है, संपूर्ण कोण कहलाता है। आप देख सकते हैं कि संपूर्ण कोण पूरा (पूर्ण) घूर्णन दर्शाता है।

शून्य कोण : वह कोण, जिसकी अंश माप 0° होती है, शून्य कोण कहलाता है। ध्यान दीजिए कि शून्य कोण की स्थिति में किरण द्वारा कोई घूर्णन नहीं किया जाता है।

देखें आपने कितना सीखा 11.3

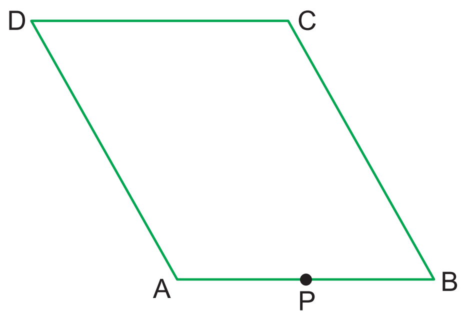
1. निम्न कोणों मे से समकोण, न्यून कोण, अधिक कोण तथा सरल कोण को पहचानिए:



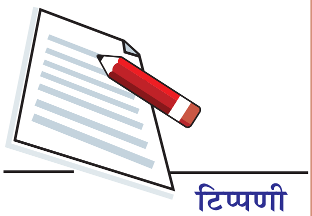
चित्र 11.19

2. चित्र 11.20 में ∠DAB, ∠ABC, ∠ADC, ∠DCB, ∠BAP को न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण अथवा सरल कोण के रूप में पहचानिए।

3. उपरोक्त प्रश्नों 1 तथा 2 में, चांदे का प्रयोग करके कोणों को मापिए।



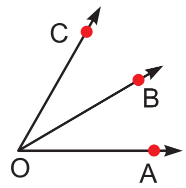
चित्र 11.20



टिप्पणी

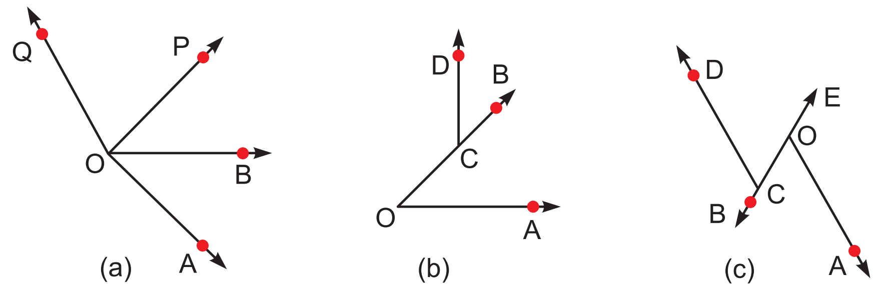
11.6 कोणों के युग्म

आसन्न कोण : दो कोणों को आसन्न कोण का युग्म कहते हैं। यदि उनका एक सांझा शीर्ष (vertex) तथा एक सांझी भुजा (arm) होती है तथा दूसरी भुजा सांझी भुजा के विपरीत ओर स्थित होती है। चित्र 11.21 में $\angle AOB$ तथा $\angle BOC$ आसन्न कोण हैं। उनकी सांझी भुजा OB है तथा सांझा शीर्ष O है तथा भुजाएं OA तथा OC, भुजा OB के विपरीत ओर स्थित हैं। नोट कीजिए कि $\angle AOC$ तथा $\angle AOB$ आसन्न कोण नहीं है, क्योंकि चाहे उनकी एक सांझी भुजा OA तथा सांझा शीर्ष O है, लेकिन उनकी शेष दो भुजाएं सांझी भुजा के एक ही ओर स्थित हैं। इसी प्रकार, $\angle AOC$ तथा $\angle BOC$ आसन्न कोण नहीं हैं। क्यों?



चित्र 11.21

उदाहरण 11.1 : नीचे दिए गए चित्र 11.22 में बताइए कि कोणों के युग्म आसन्न कोण हैं या नहीं। कारण भी बताइए:



चित्र 11.22

(a) $\angle AOB$ तथा $\angle POQ$; (b) $\angle AOB$ तथा $\angle BCD$; (c) $\angle BCD$ तथा $\angle OCD$

हल : (a) दोनों कोणों का सांझा शीर्ष O है, लेकिन उनकी सांझी भुजा नहीं है। इसलिए ये आसन्न कोण नहीं हैं।

(b) दोनों कोणों की एक भुजा एक ही रेखा पर है, लेकिन शीर्ष (O तथा C) अलग-अलग हैं। इसलिए ये आसन्न कोण नहीं हैं।

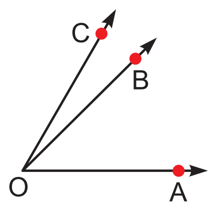
(c) दोनों कोणों का सांझा शीर्ष C है तथा सांझी भुजा CD है। इनकी दूसरी भुजाएं सांझी भुजा की विपरीत ओर स्थित हैं। अतः इन कोणों का युग्म आसन्न कोणों का युग्म है।

उदाहरण 11.2 : एक कोण AOB दिया गया है। एक अन्य कोण इस प्रकार बनाइए कि दोनों कोण आसन्न कोण बन जाएं।

हल : 1. OB की दूसरी ओर, जिधर A नहीं है, एक बिन्दु C लीजिए।

2. OC को मिलाइए तथा आगे बढ़ाइए।

$\angle AOB$ तथा $\angle BOC$ आसन्न कोण हैं। क्यों?

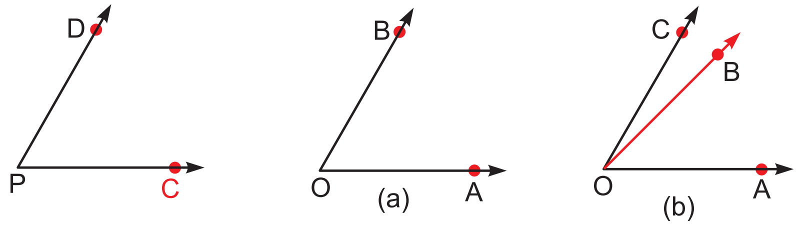


चित्र 11.23

पूरक कोण : दो कोण पूरक कोण कहलाते हैं। यदि उनके मापों का योग $90°$ होता है। उदाहरण के लिए, $30°$ तथा $60°$ के कोण पूरक कोण हैं। दो कोण आसन्न होने आवश्यक नहीं हैं, परंतु वे यदि आसन्न तथा पूरक हैं तो एक समकोण बनाते हैं।

टिप्पणी

चित्र 11.24 (a) तथा (b) देखिए:



चित्र 11.24

1. किसी दिए गए कोण का पूरक कोण बनाने के लिए पहले हम उस कोण को मापते हैं।
2. उसकी माप को हम 90° में से घटाते हैं।
3. चांदे की सहायता से उस नए प्राप्त माप का कोण बनाते हैं।

उदाहरण 11.3 : ज्ञात कीजिए कि क्या नीचे दिए कोण-युग्म पूरक हैं।

(a) 30° तथा 60° के कोण (b) 37° तथा 53° के कोण

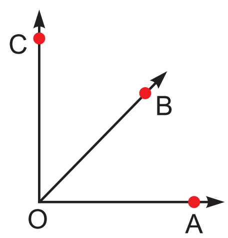
(c) 45° तथा 55° के कोण (d) 45° तथा 45° के कोण

हल : (a), (b) तथा (d) पूरक कोण हैं, लेकिन (c) पूरक कोण नहीं है।

उदाहरण 11.4 : दिए गए कोण AOB के लिए एक ऐसा आसन्न कोण BOC बनाइए कि कोण पूरक कोण बन जाएं।

हल : 1. परकार का प्रयोग करके ∠AOC, 90° का कोण बनाएं।

2. फिर कोण BOC बनाइए, जैसा चित्र 11.25 में दिखाया गया है।



चित्र 11.25

∠AOB तथा ∠BOC पूरक कोण हैं। यह आसन्न कोण भी हैं।

सम्पूरक कोण : दो कोणों का युग्म सम्पूरक कहलाता है, यदि उन कोणों की माप का योग 180° हो।

उदाहरण के लिए, 60° तथा 120° के कोण सम्पूरक कोण हैं। दो समकोण भी सम्पूरक हैं। आप देखेंगे कि दो आसन्न सम्पूरक कोण एक सरल कोण बनाते हैं। ऐसे कोणों को रैखिक-युग्म कहते हैं। दो सम्पूरक कोण सदा **रैखिक युग्म** नहीं बनाते।

उदाहरण 11.5 : (a) 40° के कोण के सम्पूरक कोण का माप ज्ञात कीजिए।

(b) ज्ञात कीजिए कि क्या निम्न कोण युग्म सम्पूरक हैं या नहीं?

(i) 30° तथा 60° के कोण (ii) 60° तथा 120° के कोण

(iii) 70° तथा 90° के कोण (iii) 80° तथा 100° के कोण

हल : (a) 40° के कोण के सम्पूरक कोण की माप (180° – 40°) अर्थात् 140° है।

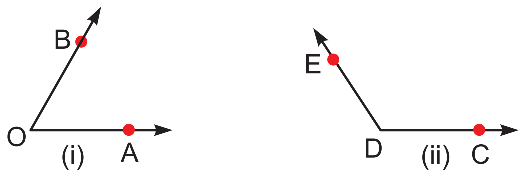
(b) (i) तथा (iii) सम्पूरक कोण नहीं हैं (ii) तथा (iv) सम्पूरक कोणों के युग्म हैं।

उदाहरण 11.6 : (a) दिए गए कोण का सम्पूरक कोण बनाइए।
(b) एक ऐसा कोण बनाइए कि दिया गया कोण तथा बनाया गया कोण एक रैखिक युग्म बनाएं।

हल : (a) $\angle AOB$ दिया है (चित्र 11.26 (i) देखिए)

रचना के पद :

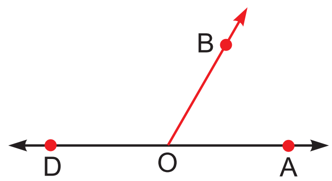
1. चांदे की सहायता से $\angle AOB$ को मापिए
2. उस अंश माप को $180°$ में से घटाइए तथा शेष अंश माप ज्ञात कीजिए।



चित्र 11.26

3. चांदे की सहायता से पद 2 में प्राप्त माप का कोण CDE बनाइए। $\angle AOB$ तथा $\angle CDE$ सम्पूरक कोण हैं (चित्र 11.26(ii)।

(b) $\angle AOB$ दिया है (चित्र 11.27 देखिए)



चित्र 11.27

रचना के पद

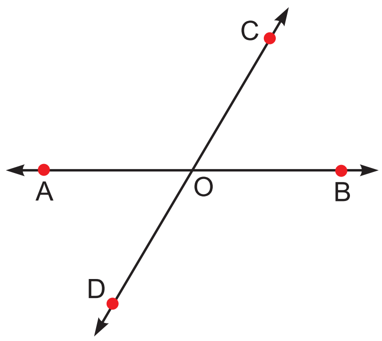
1. AO को D तक बढ़ाइए।
2. $\angle BOD$ प्राप्त कीजिए।

$\angle AOB$ तथा $\angle BOD$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं।

नोट कीजिए कि $\angle AOD = 180°$ है। इसलिए कोण AOB तथा कोण BOD आसन्न तथा सम्पूरक कोण हैं।

शीर्षाभिमुख कोण

दो रेखाएं AB तथा CD बिन्दु O पर काटती हैं (चित्र 11.28)। बिन्दु O पर निम्न कोण बनते हैं।



चित्र 11.28

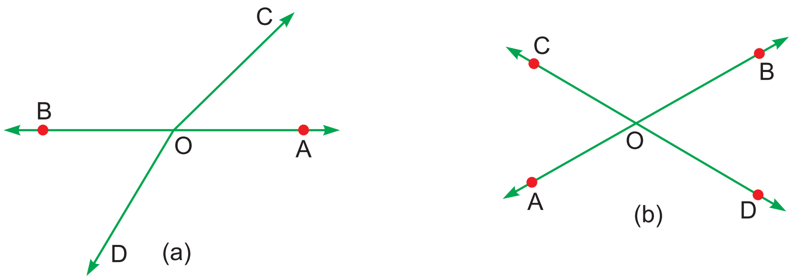
(i) $\angle AOB$ (ii) $\angle COD$
(iii) $\angle AOD$ (iv) $\angle BOC$
(iv) $\angle AOC$ (vi) $\angle BOD$

इनमें से प्रथम दो सरल कोण हैं। (iii) तथा (iv) ऐसे कोणों का युग्म है, जिसे हम **शीर्षाभिमुख कोण** कहते हैं। इसी प्रकार (v) तथा (vi) भी शीर्षाभिमुख कोणों का युग्म है।

$\angle AOD$ तथा $\angle BOC$ को मापिए। आप देखेंगे कि उनके माप समान हैं। इसी प्रकार, $\angle AOC$ तथा $\angle BOD$ के माप समान पाए जाएंगे।

शीर्षाभिमुख कोण समान माप के होते हैं।

उदाहरण 11.7 : निम्न आकृतियों को देखिए तथा शीर्षाभिमुख कोण पहचानिए:



चित्र 11.29

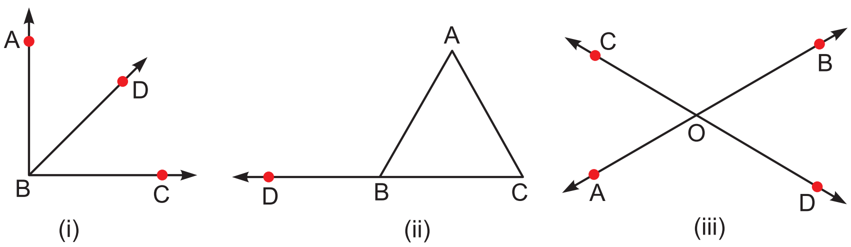
हल : चित्र 11.29 (a) में ∠AOC तथा ∠BOD शीर्षाभिमुख कोण नहीं है, क्योंकि COD एक सरल रेखा नहीं है।

इसी प्रकार, ∠AOD तथा ∠COB शीर्षाभिमुख कोण नहीं हैं।

(b) चित्र 11.29 (b) में ∠AOD तथा ∠BOC शीर्षाभिमुख कोण हैं। इसी प्रकार, ∠AOC तथा ∠BOD शीर्षाभिमुख कोण हैं।

देखें आपने कितना सीखा 11.4

1. चित्र 11.30 में, सभी



चित्र 11.30

(a) सम्पूरक कोणों के नाम लिखिए। (b) पूरक कोणों के नाम लिखिए।

(c) शीर्षाभिमुख कोणों के नाम लिखिए। (d) रैखिक युग्म के नाम लिखिए।

(e) आसन्न कोणों के युग्मों के नाम लिखिए।

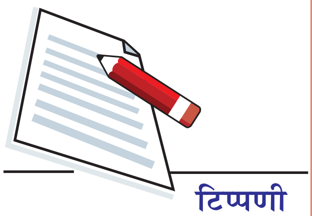
2. (a) ऊपर दिए गए चित्र 11.30 (i) में, ∠ABO तथा ∠CBD को मापिए तथा उनके मापों का योग ज्ञात कीजिए।

(b) चित्र 11.30 (ii) में, ∠ABC तथा ∠ABD को मापिए तथा उनके मापों का योग ज्ञात कीजिए।

(c) उपरोक्त चित्र 11.30 (iii) में ∠ABC, ∠BCA तथा ∠CAB को मापिए तथा उनके मापों का योग ज्ञात कीजिए।

(d) उपरोक्त चित्र 11.30 (iii) में, कोण AOC तथा BOD को मापिए। क्या उनके माप समान हैं?

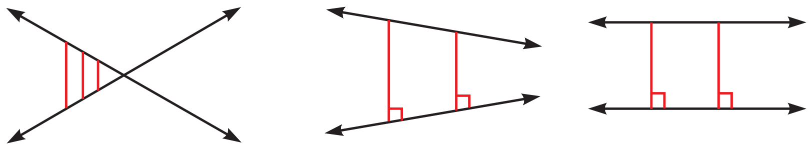
(e) उपरोक्त चित्र 11.30 (iii) में, ∠AOC तथा ∠AOD को मापिए तथा उनके मापों का योग ज्ञात कीजिए।



टिप्पणी

11.7 असमांतर तथा समांतर रेखाएं

आप पहले ही पढ़ चुके हैं कि किसी तल में खींची गई दो रेखाएं या तो आपस में काटती हैं या नहीं काटती हैं।

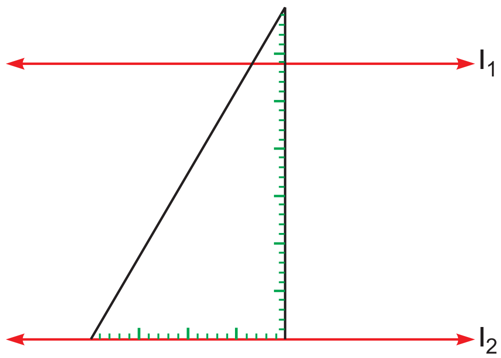


चित्र 11.31

आपस में दो न काटने वाली रेखाओं के बीच की लम्बवत दूरी सदा समान होती है। इसलिए वे न तो आपस में मिलती हैं और न काटती हैं तथा उनके बीच कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं होता। दूसरी ओर आपस में काटने वाली रेखाएं एक बिन्दु पर काटती हैं, जो उन दोनों में उभयनिष्ठ होता है। इसलिए हम कहते हैं कि

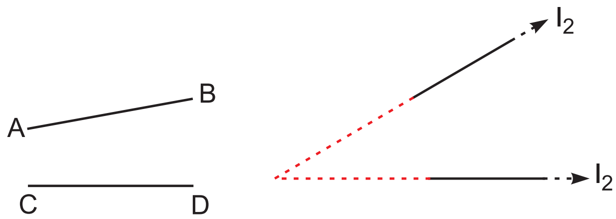
एक तल में स्थित दो रेखाएं समांतर हैं, यदि इनके बीच की लम्बवत दूरी सदा समान रहती है अथवा वे आपस में नहीं काटती।

दो रेखाएं l_1 तथा l_2 के बीच की लम्बवत दूरी ज्ञात करने के लिए हम सैट-स्क्वेयर का एक किनारा रेखा l_1 पर रखें तथा दूसरी रेखा l_2 की दूरी सैट-स्क्वेयर के दूसरे किनारे पर पढ़ें (चित्र 11.32 देखिए)। सैट-स्क्वेयर को l_1 पर आगे सरकाने पर हम जांच कर सकते हैं कि अन्य बिन्दुओं पर भी लम्बवत दूरी समान है अथवा नहीं।



चित्र 11.32

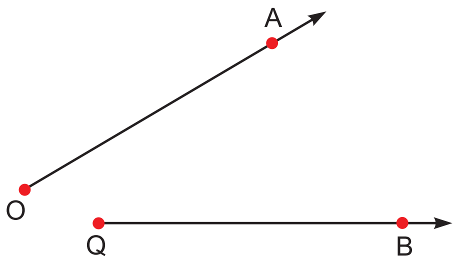
चित्र 11.33 में रेखाखंडों AB तथा CD को देखिए। वह आपस में नहीं काटते। क्या हम उन्हें समांतर कह सकते हैं? नहीं, बिल्कुल नहीं। क्योंकि रेखाएं l_1 तथा l_2 जिनके यह भाग हैं, समांतर नहीं हैं।



चित्र 11.33

यही बात किरणों OA तथा QB के लिए भी सत्य है (चित्र 11.34 देखिए)। वह आपस में नहीं काटती तथा यह समांतर भी नहीं हैं, क्योंकि वे जिन दो रेखाओं का भाग हैं, वे आपस में समांतर नहीं हैं।

यह जांच करने के लिए कि दो दी गई रेखाएं समांतर हैं या नहीं, एक रेखा के प्रत्येक बिन्दु से दूसरी रेखा तक लम्बवत दूरी ज्ञात करना संभव नहीं है, क्योंकि रेखाएं दोनों ओर अनंत तक बढ़ी होती हैं।



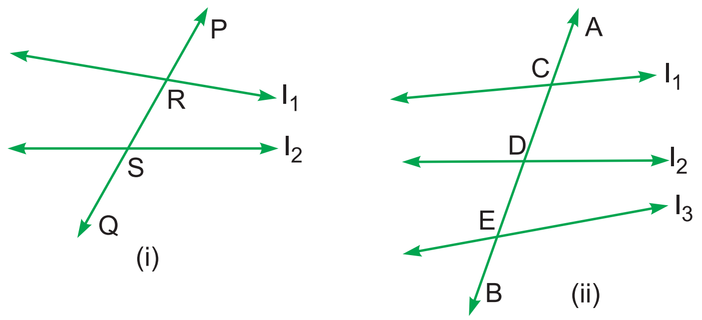
चित्र 11.34

इसलिए हम समांतर रेखाओं द्वारा बनाए गए कोणों के विषय में पढ़ेंगे। यह हमें जांच करने में सहायता करेंगे कि दो रेखाएं समांतर हैं या नहीं।

तिर्यक रेखा

यदि एक रेखा दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर काटे तो उसे तिर्यक रेखा कहते हैं।

चित्र 11.35 (i) में PQ एक तिर्यक रेखा है, जो रेखाओं l_1 तथा l_2 को काटती है, चित्र 11.35 (ii) में, AB भी एक तिर्यक रेखा है, जो रेखाओं l_1, l_2 तथा l_3 को भिन्न- भिन्न बिन्दुओं C, D तथा E पर काटती है।

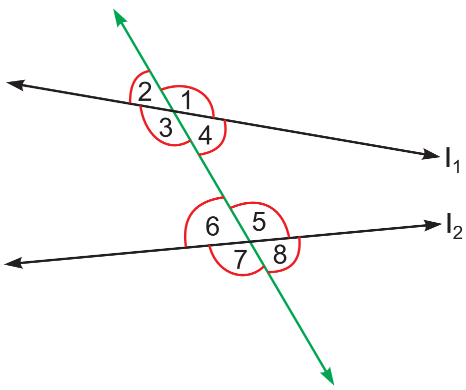


चित्र 11.35

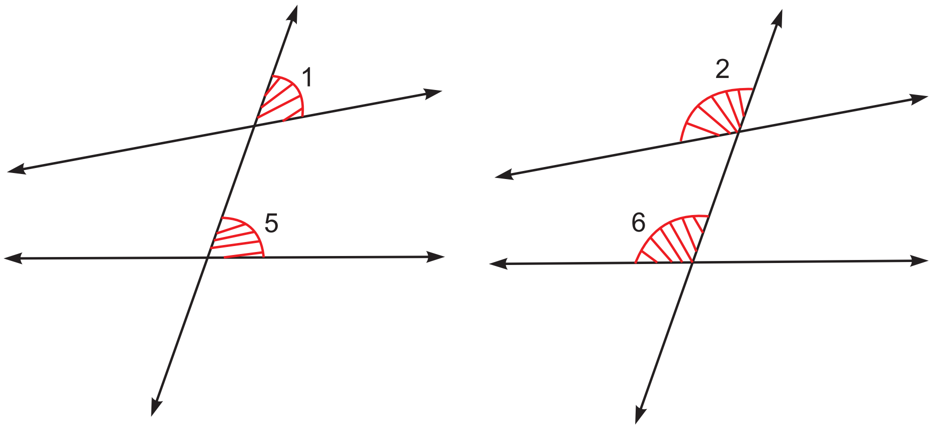
जब एक तिर्यक रेखा दो सरल रेखाओं को काटती है तो वह उनके साथ आठ कोण बनाती है, जैसा कि चित्र 11.36 में दिखाया गया है।

इनमें से कोणों के कुछ युग्म समांतर रेखाओं के विषय में जानकारी लेने के लिए बहुत लाभकारी होंगे।

चित्र 11.37 में 1 तथा 5 द्वारा अंकित कोणों को देखिए। यह दोनों तिर्यक रेखा के एक ही ओर तथा रेखाओं के बीच बने हैं। इनको संगत कोणों का युग्म कहते हैं। 2 तथा 6 द्वारा अंकित कोण भी इसी प्रकार के हैं तथा वह संगत कोणों का दूसरा युग्म बनाते हैं।



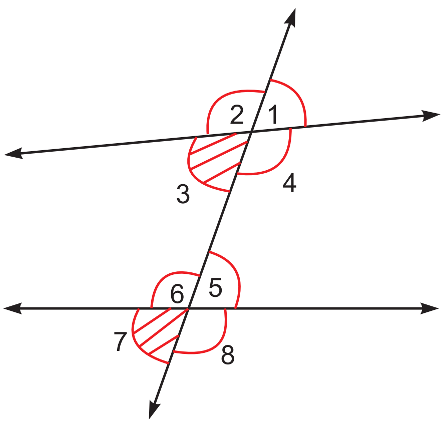
चित्र 11.36



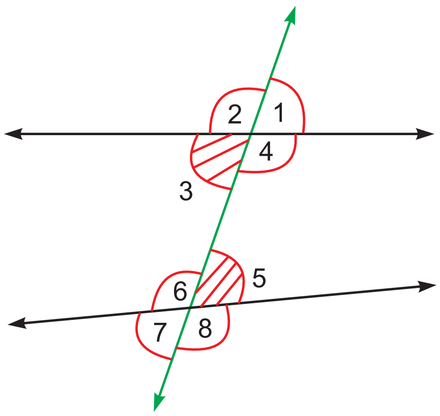
चित्र 11.37

सभी कोणों को देखने पर चित्र 11.38 में हमें संगत कोणों के दो अन्य युग्म प्राप्त होते हैं। 3 तथा 7 द्वारा अंकित कोणों का युग्म तथा 4 तथा 8 द्वारा अंकित कोणों का युग्म।

इस प्रकार, चित्र 11.38 में हमें संगत कोणों के चार युग्म मिलते हैं।



चित्र 11.38



चित्र 11.39

चित्र 11.39 में, 3 तथा 5 द्वारा अंकित कोणों को देखिए। यह तिर्यक रेखा के दो विपरीत ओर रेखाओं के अंदर बने कोण हैं। यह एकांतर कोणों का एक युग्म बनाते हैं।

इसी प्रकार 4 तथा 6 द्वारा अंकित कोण, एकांतर कोणों का एक अन्य युग्म बनाते हैं।

उपरोक्त चित्र 11.39 में 4 तथा 5 द्वारा अंकित कोणों को देखिए। यह तिर्यक रेखा के एक ही ओर तथा रेखाओं के बीच बने हैं। यह अंत:कोण का एक युग्म बनाते हैं। इस प्रकार 3 तथा 6 द्वारा अंकित कोण अंत:कोणों का एक अन्य युग्म बनाते हैं।

1, 2, 7 तथा 8 द्वारा अंकित कोण बाह्य कोण कहलाते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 11.5

1. रिक्त स्थानों को भरिए:

   (a) समांतर रेखाएं आपस में नहीं ....।

(b) दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी .... रहती है।

(c) एक रेखा, जो दो अन्य रेखाओं को भिन्न बिन्दुओं पर काटती है, उसे .... कहते हैं।

(d) एकांतर कोणों का युग्म तिर्यक रेखा के .... ओर तथा समांतर रेखाओं के .... होता है।

(e) संगत कोण तिर्यक रेखा के .... ओर तथा रेखाओं के .... बने कोण होते हैं।

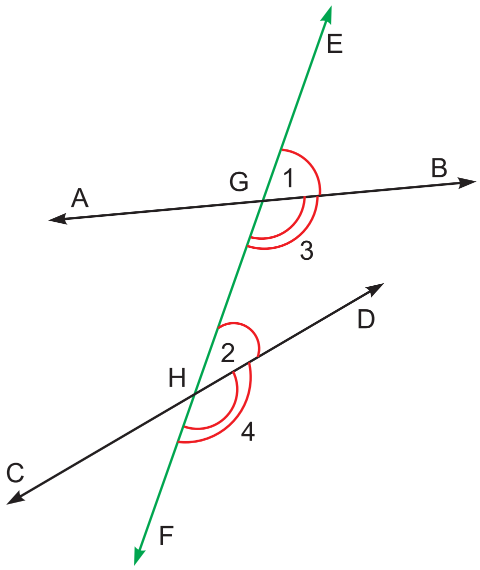
(f) अंत:कोण के युग्म तिर्यक रेखा के .... ओर .... तथा समांतर रेखाओं के .... बने कोण होते हैं।

11.8 समांतर रेखाओं के युग्म

(a) संगत कोण

AB तथा CD दो आपस में काटने वाली रेखाएं हैं तथा EF तिर्यक रेखा है, जो इन रेखाओं को G तथा H पर काटती हैं।

1 तथा 2 द्वारा अंकित कोणों को चित्र 11.40 में देखिए। क्या आप पहचान सकते हैं कि यह किस प्रकार के कोण हैं। यह संगत कोणों का एक युग्म है। मापने पर हम पाते हैं कि $\angle 2, \angle 1$ से छोटा है।



चित्र 11.40

अब आप कोणों के युग्म, जो 3 तथा 4 द्वारा अंकित है, को देखिए। यह भी संगत कोणों का एक युग्म है। मापने पर हम पाते हैं कि यह कोण भी बराबर नहीं है। $\angle 3$ कोण $\angle 4$ से छोटा है।

आइए, अब हम समांतर रेखा-युग्म AB तथा CD लें। तिर्यक रेखा EF इन समांतर रेखाओं को G तथा H पर काटती है। चित्र 11.41 में, 1 तथा 2 द्वारा अंकित कोणों को पहचानें। यह भी संगत कोणों का एक युग्म है।

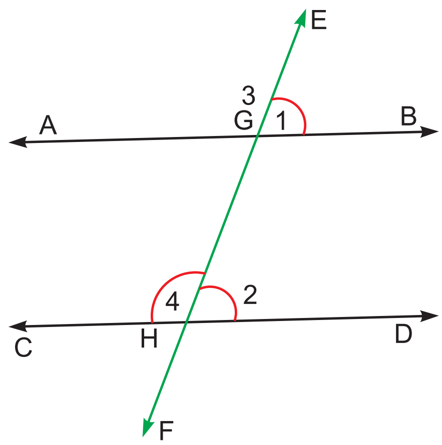
आइए, इन कोणों को मापिए

$$\angle 1 = 65°, \ \angle 2 = 65°$$

हम पाएंगे कि $\angle 1 = \angle 2$ है।

3 तथा 4 द्वारा अंकित कोण भी संगत कोणों का युग्म है। मापने पर हमें प्राप्त होगा कि

$$\angle 3 = \angle 4$$



चित्र 11.41

हम अन्य संगत कोणों के युग्मों को मापें अथवा उपरोक्त जैसा एक अन्य चित्र बनाएं तो हम सदा पाएंगे कि

यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटती है तो इस प्रकार बने संगत कोणों के युग्म बराबर होते हैं।

(b) एकांतर कोण

हम फिर दो समांतर रेखाएं AB तथा CD लेते हैं, जो तिर्यक रेखा EF द्वारा काटी जाती है।

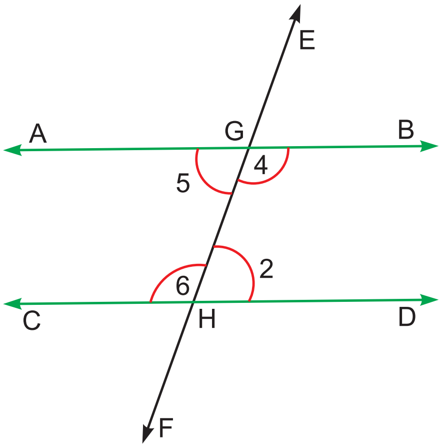
चित्र 11.42 में, 2 तथा 5 अंकित कोणों को पहचानें। यह एकांतर कोणों का युग्म है। हम इन कोणों को मापें तो पाते हैं कि

$$\angle 2 = 60°, \angle 5 = 60°$$

इसलिए $\angle 2 = \angle 5$ है।

यदि हम एकांतर कोणों के दूसरे युग्म, जो 4 तथा 6 द्वारा अंकित हैं, को मापें तो हम पाते हैं कि

$$\angle 4 = \angle 6$$



चित्र 11.42

यदि हम उपरोक्त जैसा एक और चित्र बनाएं तथा एकांतर कोणों के युग्मों को मापें तो हम सदा पाएंगे कि

यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटे तो इस प्रकार बने एकांतर कोणों के युग्म बराबर होते हैं।

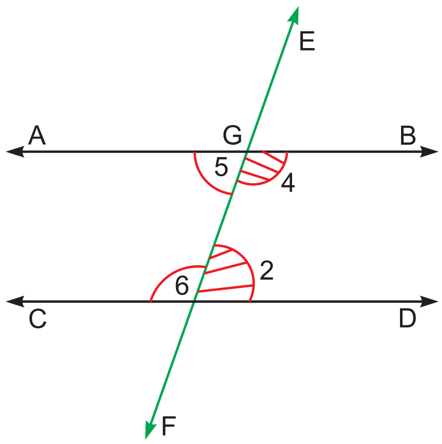
(c) अंत:कोण

आइए, समांतर रेखा युग्म AB तथा CD, जो तिर्यक रेखा EF द्वारा काटी जाती है, को फिर से देखिए। चित्र 11.43 में, 4 तथा 2 द्वारा अंकित कोणों को पहचानें। यह किस प्रकार का युग्म है? यह तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंत:कोणों का युग्म है। हम इन कोणों को मापें तो पाते हैं कि :

$$\angle 4 = 110°, \quad \angle 2 = 70°$$

क्या ये दोनों कोण समान हैं? नहीं, पर यदि हम उनके मापों का योग ज्ञात करें तो हम पाते हैं कि

$$\angle 4 + \angle 2 = 180° \text{ है।}$$



चित्र 11.43

यदि हम अंत:कोणों के दूसरे युग्म, जो 5 तथा 6 द्वारा अंकित को मापें तो हम पाते हैं

$$\angle 5 = 70°, \angle 6 = 110°$$

तथा $\quad \angle 5 + \angle 6 = 180°$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि

यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटे तो इस प्रकार बने अंत:कोणों के युग्मों का योग 180° होता है।

इस प्रकार हमने एक तिर्यक रेखा द्वारा दो समांतर रेखाओं को काटने पर बने कोणों के युग्मों के विषय में तीन गुण-धर्म सीखे हैं। संक्षेप में वह निम्न हैं:

(a) संगत कोण बराबर होते हैं।

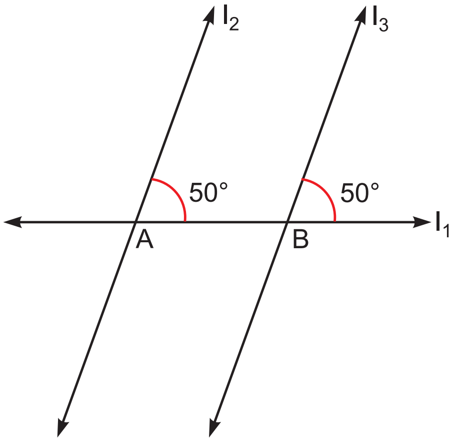
(b) एकांतर कोण बराबर होते हैं।

(c) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतः कोणों का योग 180° होता है।

आइए, अब हम प्रत्येक गुण-धर्म के विलोम की भी जांच करें।

(a) संगत कोणों के लिए जांच

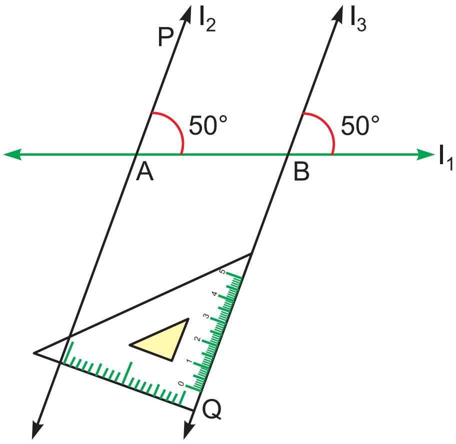
हम एक रेखा l_1 खींचते हैं तथा उस पर बिन्दु A तथा B लेते हैं। चांदे (Protractor) का प्रयोग करके हम दो रेखाएं l_2 तथा l_3 खींचते हैं, जो दोनों l_1 के साथ 50° के कोण बनाएँ। देखिए कि वे संगत कोणों का एक युग्म बनाते हैं।



चित्र 11.44

अब हम सैट स्क्वेयर को एक रेखा पर सरकाकर रेखाओं l_2 तथा l_3 के बीच की लम्बवत दूरी ज्ञात करते हैं। हम पाते हैं कि दूरी समान है। इसलिए हम कहते हैं कि रेखाएं l_2 तथा l_3 समांतर हैं। यदि हम एक अन्य रेखा तथा एक अन्य कोण लेकर इस क्रिया को दोहराएं तो हम सदा पाएंगे कि

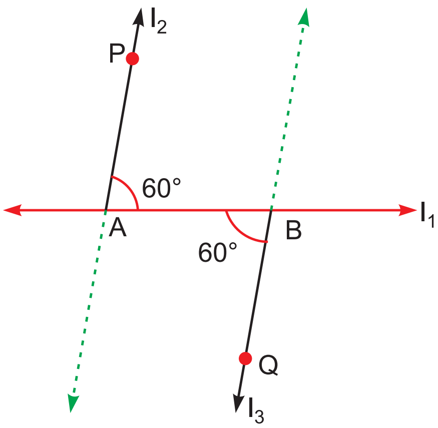
यदि एक तिर्यक रेखा दो अन्य रेखाओं को इस प्रकार काटे कि संगत कोण समान हों तो रेखाएं समांतर होती हैं



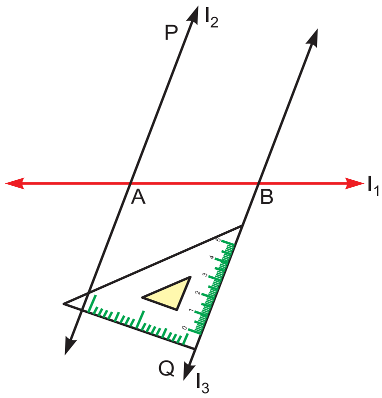
चित्र 11.45

(b) एकांतर कोणों के लिए जांच

हम फिर एक रेखा l_1 खींचते हैं तथा उस पर दो बिन्दु A तथा B लेते हैं। हम रेखाएं AP तथा BQ दो विपरीत दिशाओं में इस प्रकार खींचते हैं कि दोनों रेखाएं (AP तथा BQ) l_1 के साथ 60° का कोण बनाएँ, किरण AP तथा किरण BQ रेखाओं l_2 तथा l_3 के भाग हैं तथा ये कोण एकांतर कोणों का युग्म बनाते हैं। सैट स्क्वेयर का प्रयोग करके इन दो रेखाओं के बीच दूरी ज्ञात करने पर हम पाते हैं कि l_2 तथा l_3 समांतर हैं।



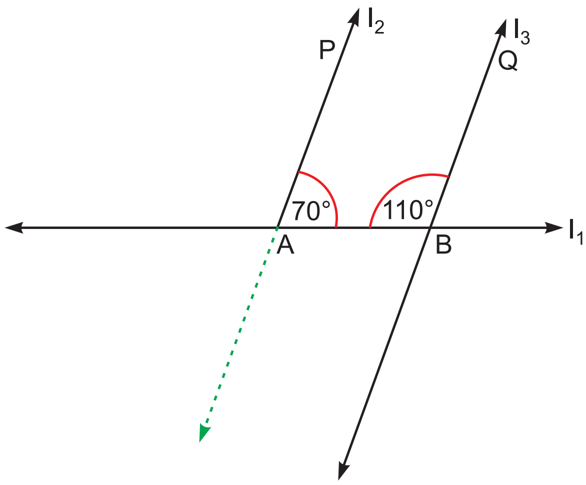
चित्र 11.46



चित्र 11.47

इस क्रिया को दोहराने पर भी हम सदा यही पाएंगे कि

यदि एक तिर्यक रेखा दो अन्य रेखाओं को इस प्रकार काटे कि एकातर कोण का (युग्म) बराबर हो तो रेखाएं समांतर होती हैं



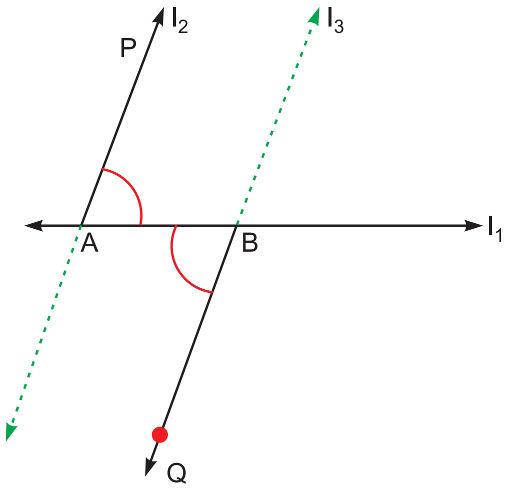
चित्र 11.48

(c) अंत:कोणों के लिए जांच

हम फिर एक रेखा l_1 खींचते हैं तथा उस पर बिन्दु A तथा B लेते हैं। हम $\angle PAB = 70°$ तथा $\angle QBA = 110°$, चांदे की सहायता से बनाकर रेखाएं l_2 तथा l_3 प्राप्त करते हैं। देखिए कि $\angle PAB + \angle QBA = 70° + 110° = 180°$ है तथा यह अंत:कोणों का एक युग्म बनाते हैं, जो तिर्यक रेखा l_1 के एक ही ओर हैं। हम रेखाओं l_2 तथा l_3 के बीच लम्बवत दूरी मापने पर पाते हैं कि रेखाएं समांतर हैं।

यह क्रिया दोहराने पर भी हम सदा पाएंगे कि

यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटे कि अंत:कोणों के युग्म, जो रेखाओं के एक ही ओर हैं, का योग 180° है तो रेखाएं समांतर होती हैं।



चित्र 11.49

हम उपरोक्त गुण-धर्मों की जांच, परकार की सहायता से रचना करके, भी कर सकते हैं:

(a) समान एकांतर कोण बनाकर

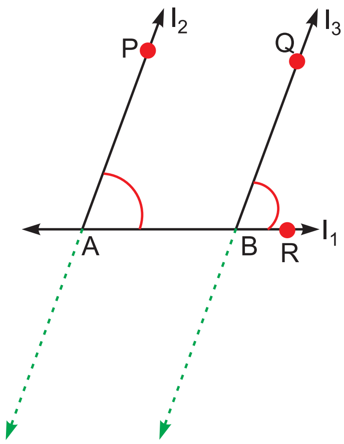
पद 1 : एक रेखा l_1 खींचिए तथा उस पर दो बिन्दु A तथा B लीजिए।

पद 2 : A पर कोण PAB बनाकर रेखा l_2 खींचिए।

पद 3 : परकार का प्रयोग करके बिन्दु B पर $\angle QBR$ बनाइए कि $\angle QBR = \angle PAB$ (चित्र 11.50) हो।

यह एक एकांतर कोणों का युग्म है।

पद 4 : सैट-स्क्वेयर का प्रयोग करके जांच कीजिए कि रेखाएं l_2 तथा l_3 समांतर हैं।



चित्र 11.50

(b) समान संगत कोण बनाकर

पद 1 : एक रेखा l_1 खींचिए तथा उस पर दो बिन्दु A तथा B लीजिए।

पद 2 : A पर $\angle PAB$ बनाकर रेखा l_2 खींचिए।

पद 3 : परकार का प्रयोग करके $\angle QBR$ रेखा l_1 की उसी ओर तथा $\angle PAB$ के समान बनाइए (चित्र 11.50)।

पद 4 : सैट-स्क्वेयर का प्रयोग करके जांच कीजिए कि रेखाएं l_2 तथा l_3 समांतर हैं।

(c) अंत:कोण, जिनका योग 180° हो, बनाकर

पद 1 : एक रेखा l_1 लें और उस पर दो बिन्दु A तथा B लीजिए।

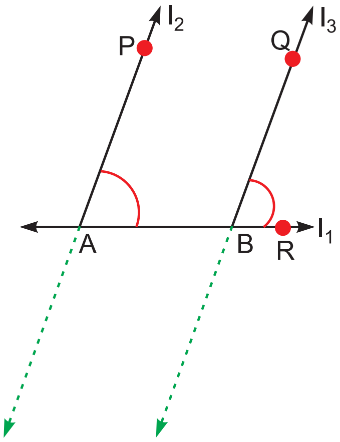
पद 2 : A पर $\angle PAB$ बनाइए।

पद 3 : बिन्दु B पर $\angle QBR = \angle PAB$ बनाइए, जो l_1 के उसी ओर हो जिधर $\angle PAB$ है।

पद 4 : AP तथा BQ को बढ़ाकर रेखाएं l_2 तथा l_3 का नाम दीजिए (चित्र 11.51)।

अब देखिए कि $\angle PAB + \angle QBA = 180°$ (क्यों)?

पद 5 : सैट-स्क्वेयर का प्रयोग करके जांच कीजिए कि l_2 तथा l_3 समांतर हैं। अत: हमने समांतर रेखाओं के तीन गुण-धर्म सीखे हैं। इनमें से किसी का भी प्रयोग करके हम जांच कर सकते हैं कि दो दी गई रेखाएं समांतर हैं या नहीं। तिर्यक रेखा, जो समांतर रेखाओं को काटती है, के साथ बना एक कोण दिए जाने पर शेष कोण ज्ञात किए जा सकते हैं।

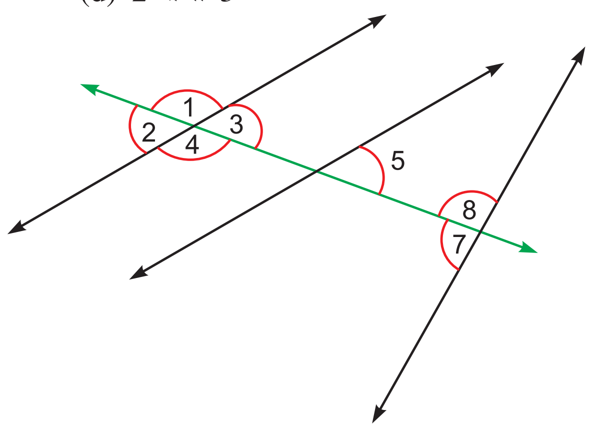


चित्र 11.51

उदाहरण 11.8 दिए गए चित्र में, अंकित किए कोणों की पहचान कीजिए:

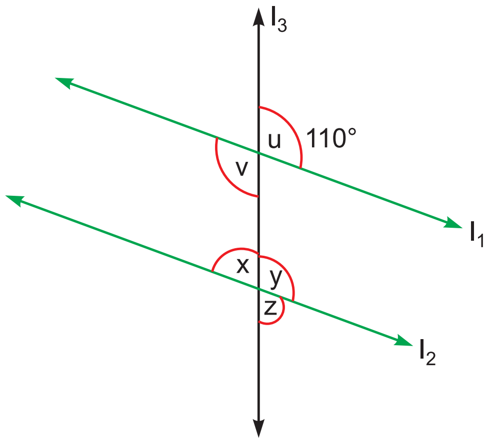
(a) 7 तथा 5 (b) 5 तथा 3

(b) 5 तथा 8 (d) 2 तथा 3



चित्र 11.52

हल : (a) एकांतर कोण (b) संगत कोण (c) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण (d) शीर्षाभिमुख कोण



चित्र 11.53

उदाहरण 11.9 : चित्र 11.53 में, दो समांतर रेखाएं l_1 तथा l_2 काटी जाती हैं, तिर्यक रेखा l_3 से। यदि $\angle u = 110°$ तो $\angle v, \angle x, \angle y$ तथा $\angle z$ ज्ञात कीजिए। कारण भी बताइए।

हल : $\angle v = \angle u = 110°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

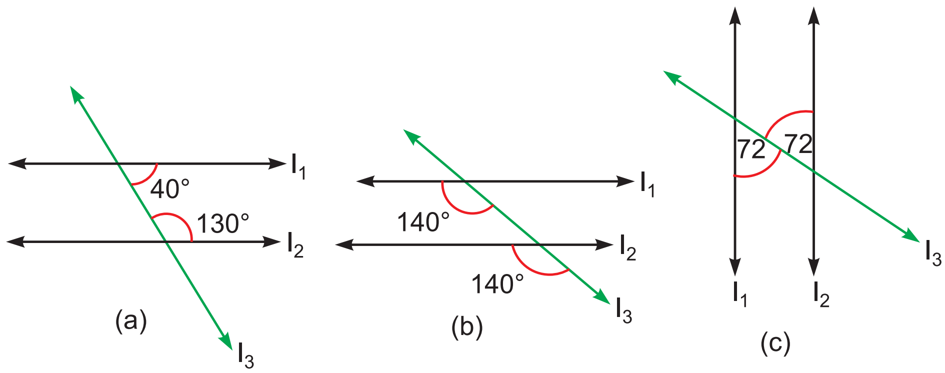
$\angle y = \angle u = 110°$ (संगत कोण)

$\angle x = 180° - \angle y = 180° - 110°$

$= 70°$ (रैखिक युग्म)

$\angle z = \angle x = 70°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

उदाहरण 11.10 : प्रत्येक चित्र में दिए गए कोणों को देखकर तथा कारण देकर बताइए कि रेखाएं l_1 तथा l_2 समांतर हैं या नहीं।



चित्र 11.54

हल : (a) l_1 तथा l_2 समांतर नहीं हैं, क्योंकि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोणों का योग (110° है) 180° नहीं है।

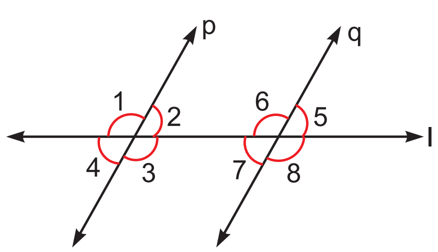
(b) l_1 तथा l_2 समांतर हैं, क्योंकि संगत कोण समान हैं।

(c) l_1 तथा l_2 समांतर हैं, क्योंकि एकांतर कोण समान हैं।

देखें आपने कितना सीखा 11.6

1. चित्र 11.55 में निम्न संगत कोणों, एकांतर कोणों, तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोणों या शीर्षाभिमुख कोणों की पहचान कीजिए:

(a) $\angle 2$ तथा $\angle 6$; (b) $\angle 3$ तथा $\angle 8$; (c) $\angle 2$ तथा $\angle 7$; (d) $\angle 5$ तथा $\angle 7$; (e) $\angle 3$ तथा $\angle 4$

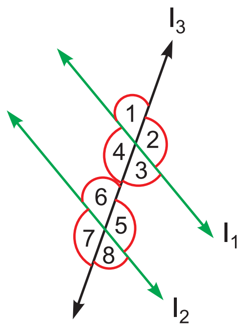


चित्र 11.55

2. चित्र 11.56 में, l_1 तथा l_2 दो समांतर रेखाएं हैं तथा l_3 एक तिर्यक रेखा है।

   यदि $\angle 1 = 70°$ है तो निम्न कोणों के माप ज्ञात कीजिए

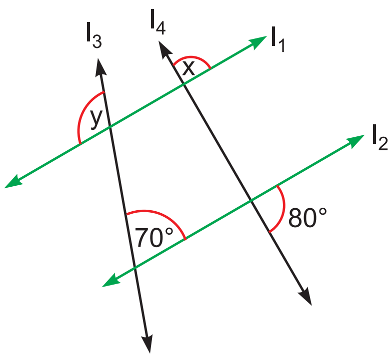
   (a) $\angle 4$, (b) $\angle 5$, (c) $\angle 6$



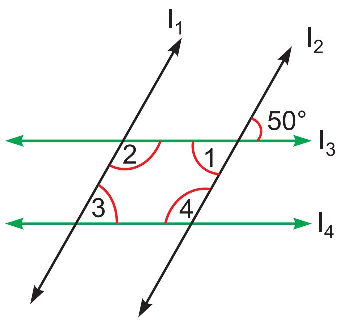
चित्र 11.56

3. चित्र 11.57 में, l_1 तथा l_2 दो समांतर रेखाएं हैं तथा l_3 तथा l_4 दो तिर्यक रेखाएं हैं तो निम्न कोणों के मान ज्ञात कीजिए:

   (a) $\angle x$ (b) $\angle y$



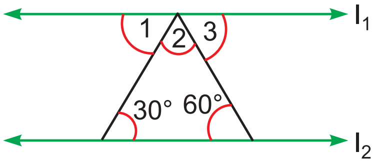
चित्र 11.57



चित्र 11.58

4. चित्र 11.58 में, यदि रेखाएं l_1 तथा l_2 समांतर हैं तथा रेखाएं l_3 तथा l_4 समांतर हैं तो $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ तथा $\angle 4$ के माप ज्ञात कीजिए।

5. चित्र 11.59 में, यदि l_1 तथा l_2 समांतर हैं तो $\angle 1$, $\angle 2$ तथा $\angle 3$ के माप ज्ञात कीजिए।

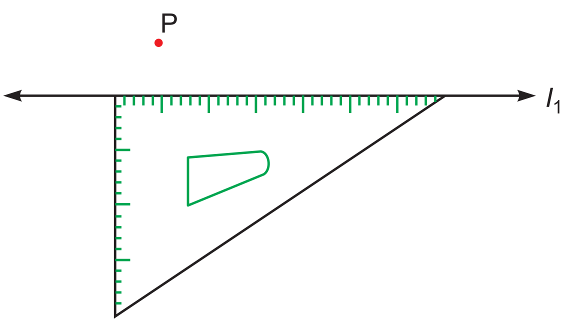


चित्र 11.59

11.9 समांतर रेखाएं खींचना

अब हम एक दी गई रेखा के समांतर एक अन्य रेखा खींचना सीखेंगे।

(a) सैट-स्क्वेयर की सहायता से



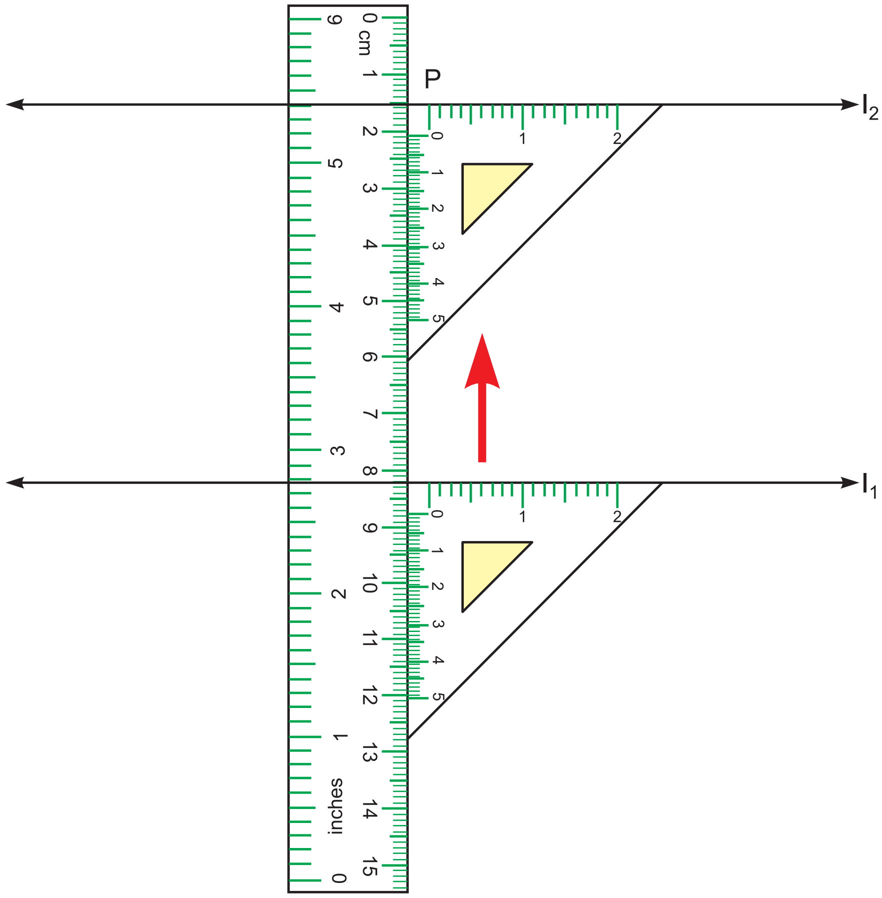
चित्र 11.60

उदाहरण 11.11 : एक दी गई रेखा l_1 के समांतर एक रेखा खींचिए, जो एक दिए गए बिन्दु P से गुजरती हो।

पद 1 : एक सैट स्क्वेयर को इस प्रकार रखिए कि उसका एक किनारा रेखा l_1 के साथ संपाती हो जाए (चित्र 11.60 देखिए)।

पद 2 : अब एक फुट (Ruler) को सैट-स्क्वेयर के दूसरे किनारे के साथ बगैर हिलाए रखिए।

पद 3 : फुटे को अपनी जगह पर पक्का रखकर सैट स्क्वेयर को फुटे के साथ-साथ ऊपर बढ़ाइए, जब तक उसका ऊपरी किनारा बिन्दु P को छूने लगे (चित्र 11.61)।



चित्र 11.61

पद 4 : अब सैट-स्क्वेयर को अपनी जगह पक्का रखकर एक रेखा l_2, बिन्दु P से होकर सैट स्क्वेयर के किनारे के साथ-साथ खींचिए। l_2 हमारी इच्छित रेखा है, जो बिन्दु P से होकर जाती है तथा रेखा l_1 के समांतर है।

(b) फुटे तथा परकार की सहायता से

(i) एकांतर कोणों की समानता का प्रयोग करके

टिप्पणी

उदाहरण 11.12 : एक दी गई रेखा l_1 के समांतर एक रेखा खींचिए, जो एक दिए गए बिन्दु P से होकर जाती हो

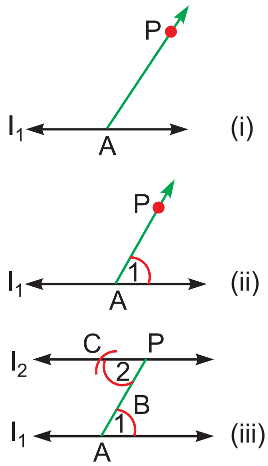
पद 1 : रेखा l_1 पर कोई बिन्दु A लीजिए तथा PA को मिलाइए।

पद 2 : एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर तथा A को केंद्र मानकर एक चाप लगाइए। A पर बने कोण को 1 द्वारा अंकित कीजिए।

पद 3 : P को केंद्र मानकर और वही त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप लगाइए, जो PA को बिन्दु B पर काटे।

पद 4 : चाप BC को इस प्रकार काटो कि P पर बना $\angle 2$ तथा बिन्दु A पर बना $\angle 1$ बराबर हों।

पद 5 : PC को मिलाइए तथा इसे दोनों ओर बढ़ाइए (चित्र 11.62)।



चित्र 11.62

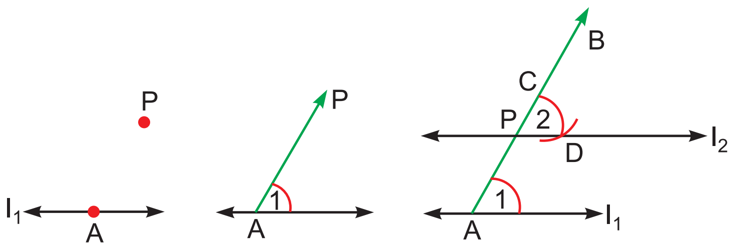
इस प्रकार हमें रेखा l_2 प्राप्त हुई, जो रेखा l_1 के समांतर है तथा बिन्दु P से होकर जाती है।

(ii) संगत कोणों की समानता का प्रयोग करके

पद 1 : रेखा l_1 पर एक बिन्दु A लीजिए तथा A तथा P को मिलाइए तथा उसे तक बढ़ाइए।

पद 2 : A को केंद्र मानकर तथा एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर A पर एक कोण बनाइए तथा उसे 1 द्वारा अंकित कीजिए।

पद 3 : P को केंद्र मानकर तथा वही त्रिज्या लेकर PB को C पर काटिए। जैसा कि चित्र 11.63 में दिखाया गया है।



चित्र 11.63

पद 4 : P पर कोण $\angle 2$ ऐसा बनाइए कि $\angle 2 = \angle 1$ हो।

पद 5 : PD को मिलाइए तथा इसे दोनों ओर बढ़ाइए। इस प्रकार हमें रेखा l_2 प्राप्त हुई, जो l_1 के समांतर है तथा बिन्दु P से होकर रह जाती है

देखें आपने कितना सीखा 11.7

1. एक 6.8 सेमी लम्बा रेखाखंड लीजिए तथा उसके नीचे एक बिन्दु लीजिए, उस बिन्दु से होकर जाती एक रेखा खींचिए, जो दी गई रेखा के समांतर हो:

(i) सैट-स्क्वेयर का प्रयोग करके

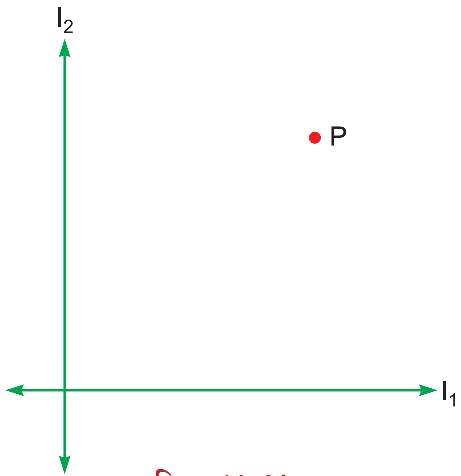
(ii) परकार का प्रयोग करके

2. दो रेखाएं l_1 तथा l_2 लीजिए तथा एक बिन्दु P लीजिए, जैसा चित्र 11.64 में दिखाया गया है।

(a) अब बिन्दु P से दोनों रेखाओं l_1 तथा l_2 के समांतर रेखाएं

(i) सैट-स्क्वेयर की सहायता से खींचिए।

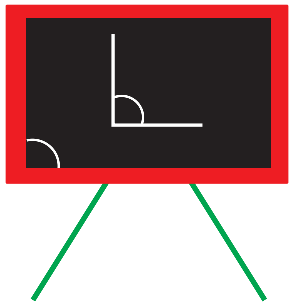
(ii) परकार की सहायता से खींचिए।



चित्र 11.64

11.10 लम्बवत रेखाएं

एक मेज के किनारों के बीच अथवा एक ब्लैक बोर्ड के कोनों के बीच के कोण को देखिए।

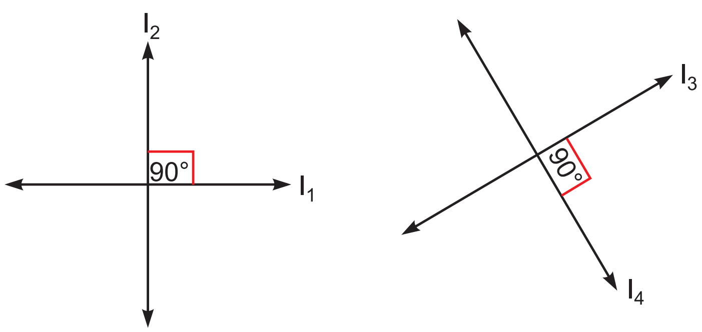


चित्र 11.65

ये समकोण के उदाहरण हैं। आप अन्य कोनों पर बने कोणों के विषय में क्या कहेंगे? प्रत्येक कोने पर बना कोण समकोण है।

यदि दो रेखाओं के बीच एक समकोण (अथवा 90° का कोण) है तो उन्हें लम्बवत् रेखाएं कहा जाता है

चित्र 11.66 में l_1 तथा l_2 लम्बवत रेखाएं हैं। हम यह भी कहते हैं कि l_1 लम्ब है l_2 पर अथवा l_2 लम्ब है l_1 पर। l_3 तथा l_4 भी लम्बवत् रेखाएं हैं। यह आपस में एक-दूसरे पर लम्ब हैं।



चित्र 11.66

किसी दी गई रेखा पर एक लम्बवत रेखा खींचना

हम किसी रेखा पर दिए गए बिन्दु से चांदा, सैट-स्क्वेयर अथवा परकार का प्रयोग करके उस रेखा पर एक लम्ब रेखा खींच सकते हैं।

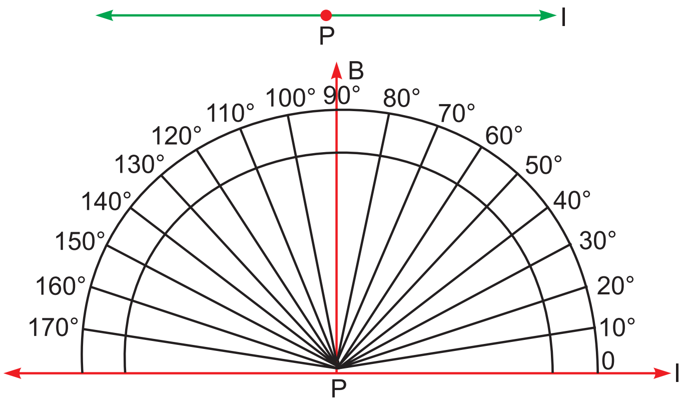
(a) चांदे का प्रयोग करके

पद 1 : एक रेखा l खींचिए तथा उस पर बिन्दु P लीजिए।

पद 2 : चांदे की आधार रेखा (base line) को रेखा l पर इस प्रकार रखिए कि चांदे का केंद्र बिन्दु P पर हो।

पद 3 : चांदे को पक्का पकड़कर, 90° के अंकित बिन्दु पर लगाकर उसे B का नाम दीजिए।

पद 4 : P तथा B को मिलाइए तथा उसे बढ़ाकर इच्छित लम्ब रेखा पाइए।



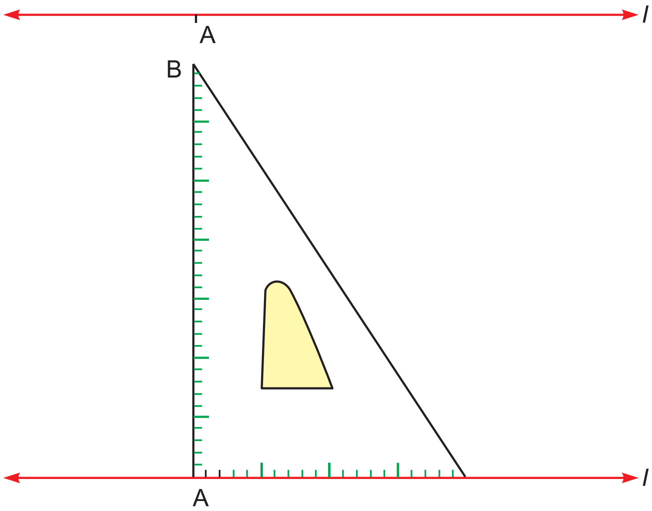
चित्र 11.67

(b) सैट-स्क्वेयर का प्रयोग करके

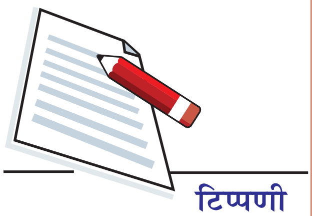
पद 1 : एक रेखा l खींचिए तथा उस पर बिन्दु A लीजिए।

पद 2 : एक सैट-स्क्वेयर को l पर इस प्रकार रखिए कि उसका वह कोना, जहां समकोण है, बिन्दु P पर हो तथा एक सिरा रेखा l पर हो

पद 3 : सैट-स्क्वेयर अपनी जगह अच्छी तरह जमा कर, दूसरे सिरे के साथ-साथ रेखा AB खींचिए। रेखा AB वह इच्छित रेखा है, जो A से होकर जाती है तथा l पर लम्बवत है।



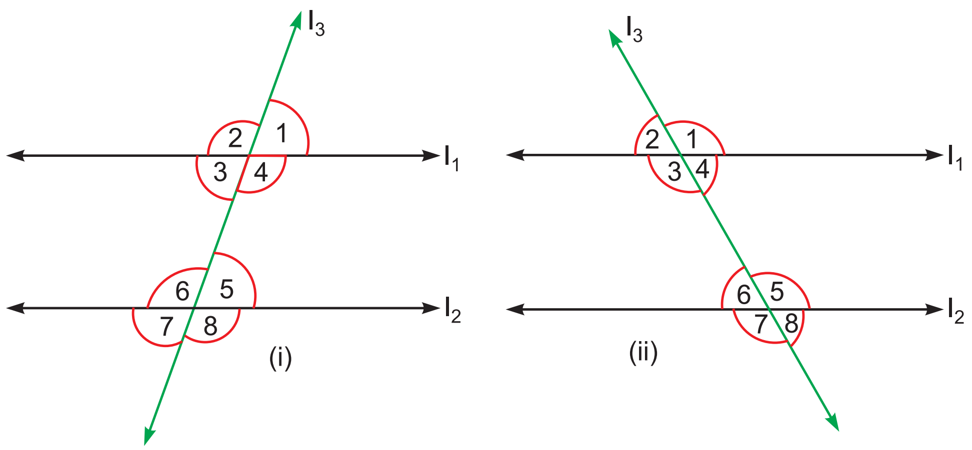
चित्र 11.68



टिप्पणी

आइए दोहराएं

- $90°$ के कोण को समकोण कहते हैं।
- $90°$ से कम तथा $0°$ से अधिक अंश माप के कोणों को न्यून कोण कहते हैं।
- $90°$ से अधिक तथा $180°$ से कम अंश माप के कोणों को अधिक कोण कहते हैं।
- $180°$ के अंश माप वाले कोण को सरल कोण कहते हैं।
- दो कोण आसन्न कोण होते हैं, यदि उनका सांझा शीर्ष हो, एक सांझी भुजा हो तथा दूसरी भुजाएं सांझी भुजा की विपरीत ओर स्थित हों।
- दो कोण पूरक कोणों का युग्म बनाते हैं, यदि उनकी मापों का योग $90°$ हो।
- आसन्न सम्पूरक कोणों का युग्म, कोणों का एक रैखिक युग्म कहलाता है।
- शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं।
- एक रेखा, जो दो या अधिक रेखाओं को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती है, तिर्यक रेखा कहलाती है।
- जब एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को दो बिन्दुओं पर काटे तो आठ कोण बनते हैं।



चित्र 11.69

- (a) $\angle 1$ तथा $\angle 5$, $\angle 2$ तथा $\angle 6$, $\angle 3$ तथा $\angle 7$ तथा, $\angle 4$ तथा $\angle 8$ संगत कोणों के युग्म हैं।

  (b) $\angle 3$ और $\angle 5$ तथा $\angle 4$ और $\angle 6$ एकांतर कोणों के युग्म हैं।

  (c) $\angle 4$ और $\angle 5$ तथा $\angle 3$ और $\angle 6$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोणों के युग्म हैं।
- यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटे तो

(a) संगत कोणों के युग्म बराबर होते हैं।

(b) एकांतर कोणों के युग्म बराबर होते हैं।

(c) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंत:कोणों का योग 180° होता है।

- उपरोक्त तीन गुणधर्मों का विलोम भी सत्य होता है।
- इन गुणधर्मों का प्रयोग करके समांतर तथा लम्बवत रेखाएं खींची जा सकती हैं।

आइए अभ्यास करें

1. चांद का प्रयोग करके निम्न कोण बनाइए:

(a) 90° को कोण (b) 45° का कोण

(c) $\angle PQR = 135°$ (d) $\angle ABC = 75°$

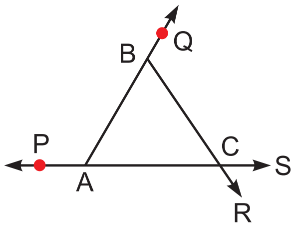
2. चित्र 11.70 में, लिखिए

(a) आसन्न कोणों के युग्म

(b) सम्पूरक कोणों के युग्म

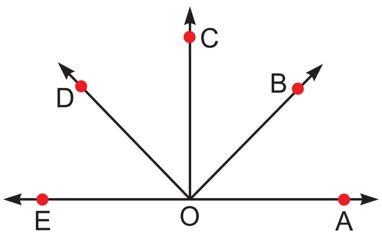
(c) शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म

(d) कोणों के रैखिक युग्म



चित्र 11.70

3. नीचे दिए गए चित्र 11.71 में $\angle BOD$ तथा $\angle AOC$ समकोण हैं। पूरक कोणों के युग्मों को नामांकित कीजिए:



चित्र 11.71

4. (a) क्या किसी सम्पूरक कोणों के युग्म के दोनों कोण न्यून कोण हो सकते हैं?

(b) क्या किसी पूरक कोणों के युग्म में एक कोण

(i) न्यून कोण

(ii) अधिक कोण हो सकता है?

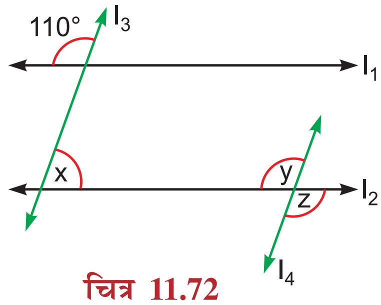
(c) क्या किसी सम्पूरक कोणों के युग्म के दोनों कोण समकोण हो सकते हैं?

5. फुटे तथा परकार की सहायता से, निम्न कोणों की रचना कीजिए तथा उनका समद्विभाजन भी कीजिए। चांदे की सहायता से माप कर उनकी जांच भी कीजिए:

(a) 60° का कोण (b) 90° का कोण

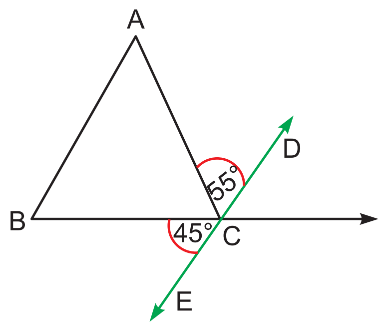
(c) 135° का कोण (d) 150° का कोण

6. चित्र 11.72 में, l_1 समांतर l_2 के तथा l_3 समांतर है l_4 के। $\angle x, \angle y$ तथा $\angle z$ के मान ज्ञात कीजिए।



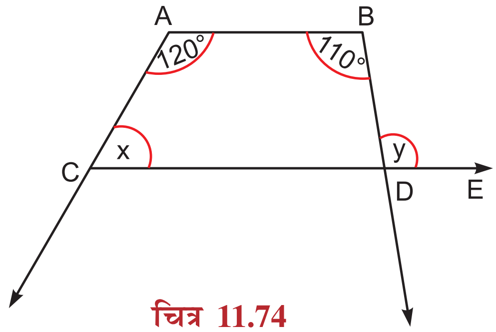
चित्र 11.72

7. चित्र 11.73 में, AB समांतर है DE के। $\angle A, \angle B$ तथा $\angle ACB$ के मान ज्ञात कीजिए।



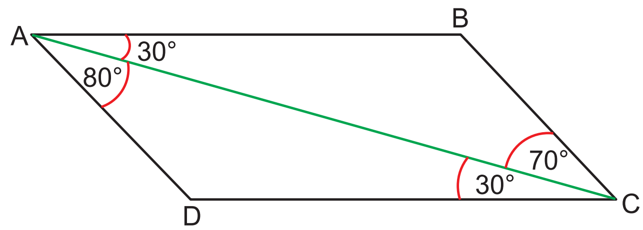
चित्र 11.73

8. चित्र 11.74 में, AB समांतर है DE के। $\angle x$ तथा $\angle y$ के मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 11.74

9. चित्र 11.75 को देखकर, समांतर रेखाओं को लिखिए। क्या AD, BC के समांतर है?



चित्र 11.75

10. रेखाखंड AB = 6.8 सेमी खींचिए। उस पर एक बिन्दु P लीजिए, ताकि AP = 4.2 सेमी। P से एक लम्ब रेखा PQ खींचिए और PQ = 5.3 सेमी बनाइए। अब रेखा रेखा QR के AB समांतर खींचिए, जो Q से होकर जाती हो। क्या QR, PQ पर लम्ब है?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 11.1

1. (a) आधा (b) पूरा (c) चौथाई (d) आधा
   (e) चौथाई
2. (a) $\angle AOB$ (b) $\angle CAB$ (c) $\angle MOL$ (d) $\angle RPQ$
   (e) $\angle ROS$
3. $\angle EAC, \angle EAB, \angle DAB, \angle DAC$
4.

शीर्ष	भुजाएं
O	OP तथा OQ
Q	QP तथा QR
M	ML तथा MN
S	SR तथा ST

देखें आपने कितना सीखा 11.3

1. (a) अधिक कोण (b) सरल कोण (c) समकोण (d) न्यून कोण
   (e) प्रतिवर्ती कोण (f) शून्य कोण (g) संपूर्ण कोण
2. $\angle DAB$ एक अधिक कोण है

   $\angle ABC$ एक न्यून कोण है

   $\angle ADC$ एक अधिक कोण है

   $\angle DCB$ एक न्यून कोण है

   $\angle BPA$ एक सरल कोण है

देखें आपने कितना सीखा 11.4

1. (a) चित्र (ii) में, $\angle DBA$ तथा $\angle ABC$ सम्पूरक कोणों का युग्म है

(iii) में, $\angle DOA$ तथा $\angle COA$, $\angle AOC$ तथा $\angle COB$, $\angle COB$ तथा $\angle BOD$, तथा $\angle BOD$ तथा $\angle AOD$ सम्पूरक कोणों के युग्म हैं

(b) चित्र (i) में, $\angle ABD$ तथा $\angle DBC$ पूरक कोणों का युग्म है

(c) चित्र (iii) में, $\angle AOC$ तथा $\angle BOD$; $\angle AOD$ तथा $\angle BOC$ शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म हैं

(d) चित्र (ii) में, $\angle DBA$ तथा $\angle CBA$ कोणों का रैखिक युग्म है

(iii) में, $\angle DOA$ तथा $\angle AOC$, $\angle AOC$ तथा $\angle COB$, $\angle COB$ तथा $\angle BOD$, $\angle BOD$ तथा $\angle DOA$ रैखिक युग्म हैं

(e) चित्र (i) में, $\angle DBC$ तथा $\angle DBA$ आसन्न कोण हैं

(ii) में, $\angle ABD$ तथा $\angle ABC$ आसन्न कोण हैं

चित्र (iii) में, $\angle DOA$ तथा $\angle AOC$, $\angle AOC$ तथा $\angle COB$, $\angle COB$ तथा $\angle BOD$, $\angle BOD$ तथा $\angle DOA$ आसन्न कोणों के युग्म हैं।

देखें आपने कितना सीखा 11.5

1. (a) काटती है (b) समान (c) तिर्यक रेखा

   (d) विपरीत, बीच में (e) एक ही, बीच में (f) एक ही, बीच में

देखिए आपने कितना सीखा 11.6

1. (a) तिर्यक के एक ही ओर के अंत:कोण (b) संगत कोण

   (c) एकांतर कोण (d) शीर्षाभिमुख कोण (e) रैखिक युग्म

2. (a) $110°$ (b) $110°$ (c) $70°$

3. (a) $\angle x = 100°$, (b) $\angle y = 110°$

4. $\angle 1 = 50°$, $\angle 2 = 130°$, $\angle 3 = 50°$, $\angle 4 = 130°$

5. $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 90°$, $\angle 3 = 60°$

आइए अभ्यास करें

2. (a) आसन्न कोण :

   $\angle ACB$, $\angle ACR$; $\angle ACB$, $\angle BCS$

   $\angle ABC$, $\angle CBQ$

$\angle BAC, \angle BAP$

$\angle RCA, \angle RCS$

(b) जैसा कि (a) में है

(c) $\angle BCA, \angle RCS$;

$\angle RAC, \angle BCS$

(d) जैसा कि (a) में है

3. $\angle AOB,\ \angle BOC$

$\angle BOC,\ \angle COD$

$\angle COD,\ \angle EOD$

4. (a) नहीं

(b) (i) हां (ii) नहीं

(c) हां

6. $\angle x = 70°, \angle y = 110°, \angle z = 110°$

7. $\angle A = 55°, \angle B = 45°$ तथा $\angle ACB = 80°$

8. $\angle x = 60°, \angle y = 110°$

9. AB तथा CD; नहीं

10. हां

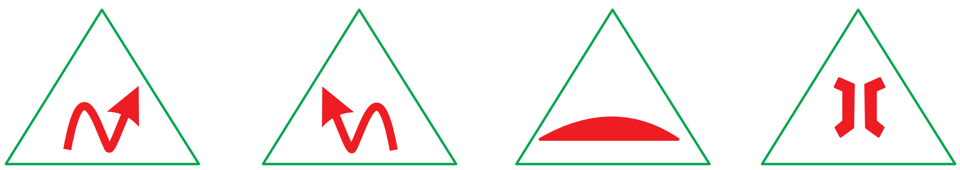
12

त्रिभुज एवं उसके प्रकार

हम रेखा और कोणों के विषय में पढ़ चुके हैं। अब हम एक ऐसे चित्र का अध्ययन करेंगे, जो दो से अधिक रेखाखंडों से मिलकर बनता है। इनमें त्रिभुज सबसे सरल चित्र है।

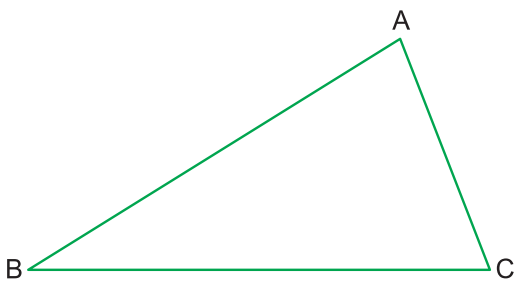
जैसा कि नाम से विदित है कि त्रिभुज तीन भुजाओं वाला चित्र होता है, जिसे प्रतीक Δ से व्यक्त करते हैं।

हमारे दैनिक जीवन में इस चित्र का बहुत ही महत्व है। हम अपने चारों ओर बहुत से चित्र देखते हैं, जिनमें कुछ त्रिभुजाकार चित्र भी होते हैं, जैसे–ज्यामितीय बॉक्स में रखे दो सेट-स्क्वेयर, फर्शों को बनाने में प्रयोग की गई त्रिभुजाकार टाइलें तथा चौराहों के आसपास यातायात चिह्नों के संकेत भी त्रिभुज के अंदर देखने को मिलते हैं, जैसा कि नीचे चित्र 12.1(i) में दिखाए गए हैं:



चित्र 12.1(i)

यदि A, B तथा C कोई तीन असंरेखीय (non-collinear) बिन्दु हों तो रेखाखंडों AB, BC तथा CA से बनी आकृति को शीर्षों A, B तथा C वाला त्रिभुज कहते हैं। इस त्रिभुज को 'ΔABC' से प्रदर्शित करते हैं। इस त्रिभुज में छः अवयव या भाग (elements) होते हैं, जैसा कि चित्र 12.1(ii) से देख सकते हैं। वह हैं : तीन भुजाएं AB, BC, CA तथा तीन कोण $\angle$ABC, $\angle$ACB और $\angle$BAC।



चित्र 12.1(ii)

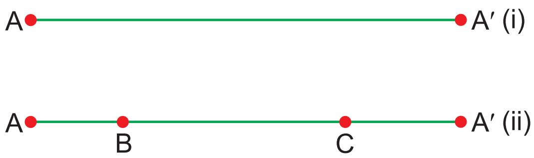
टिप्पणी

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु, भुजाएं और कोणों के विषय में
- त्रिभुज के कोणों में संबंध
- त्रिभुजों का वर्गीकरण
  (a) भुजाओं के आधार पर
  (b) कोणों के आधार पर
- विशेष प्रकार के त्रिभुजों के गुणधर्म

12.1 त्रिभुज

त्रिभुज का चित्र समझने के लिए हम एक पतला सीधा तार प्रयोग में लेंगे, जैसा कि चित्र 12.2 (i) में दर्शाया गया है।

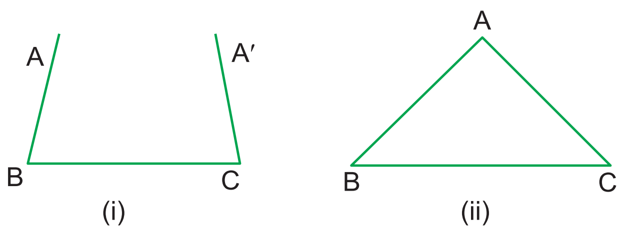


चित्र 12.2

इस तार पर दो बिन्दु B और C मानकर उन पर धागा बांधा तथा तार को चित्र 12.2 (ii) की स्थिति में रखा।

अब तार को दोनों बिन्दुओं B और C से मोड़ा जो कि चित्र 12.3 (i) की भांति होगी।

A और A′ को एक बिन्दु पर मिलाया और इसका नाम A दिया जैसा कि चित्र 12.3 (ii) में दर्शाया गया है। इस चित्र को त्रिभुज का नाम दे सकते हैं।



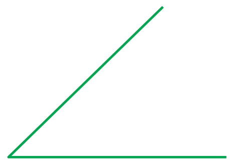
चित्र 12.3

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि चित्र त्रिभुज किसी तल में स्थित तीन रेखाखंडों से बना सरल बंद चित्र होता है। अत:

तीन रेखाखंडों से बने सरल बंद चित्र को त्रिभुज कहते हैं।

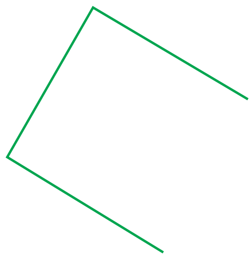
करके सीखिए:

(a) माचिस की दो तीलियां लेकर उनके एक सिरे को ऑलपिन से जोड़िए, जैसा कि चित्र 12.4 में दर्शाया गया है। क्या इनसे कोई बंद चित्र बन सकता है? नहीं।



चित्र 12.4

(b) अब एक तीसरी तीली की सहायता से हम निम्न चित्र बना सकते हैं।

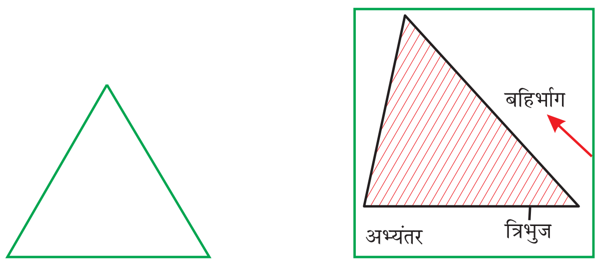


चित्र 12.5

उपरोक्त एक सरल बन्द आकृति नहीं है।

चित्र 12.6 (i) एक सरल बंद चित्र है, जिसे त्रिभुज कहते हैं।

प्रत्येक सरल बंद आकृति (चित्र) की तरह, एक त्रिभुज भी अपने तल को तीन भागों में बांटता है। देखिए चित्र 12.6 (ii) ये हैं:



(i) (ii)

चित्र 12.6

त्रिभुज का अभ्यंतर (छायांकित)

त्रिभुज का बहिर्भाग (अछायांकित)

स्वयं त्रिभुज

त्रिभुज और उसके अभ्यंतर को मिलाकर उस त्रिभुज का त्रिभुजाकार क्षेत्र कहते हैं।

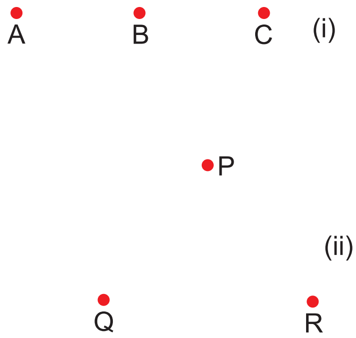
टिप्पणी

12.2 एक त्रिभुज बनाना

चित्र 12.7 (i) में दिए गए तीन बिन्दुओं A, B, C को ध्यान से देखिए। क्या इन तीनों बिन्दुओं को मिलाकर एक त्रिभुज बनाई जा सकती है? नहीं। क्योंकि यह तीनों बिन्दु संरेखी है।

अब चित्र 12.7 (ii) में बिन्दु P, Q, R को देखो, इन्हें मिलाने से त्रिभुज बन सकता है। अतः

तीन असंरेखी बिन्दुओं को मिलाने से हमेशा एक त्रिभुज बनता है।

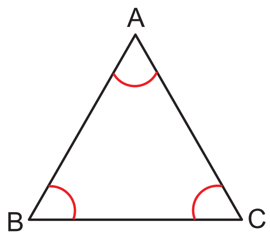


चित्र 12.7

12.3 त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु, भुजाएं, कोण, बहिष्कोण तथा अभिमुख अंतःकोण

अब हम यह जान चुके हैं कि त्रिभुज तीन असंरेख बिन्दुओं से बना बंद चित्र होता है। यही तीन बिन्दु त्रिभुज के **शीर्ष** बिन्दु कहलाते हैं।

जिन तीन रेखाखंडों से मिलकर त्रिभुज बनता है, वह त्रिभुज की भुजाएं कहलाती हैं। जैसा कि चित्र 12.8 से स्पष्ट है कि त्रिभुज की तीन **भुजाएं** AB, BC, व CA हैं तथा यह भुजाएं त्रिभुज में तीन कोण बनाती हैं।



चित्र 12.8

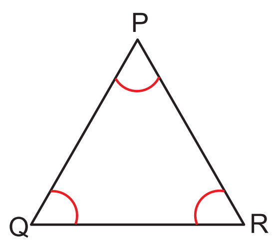
जिन्हें $\angle BAC$, $\angle ABC$ तथा $\angle BCA$ अथवा $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ से व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार किसी त्रिभुज की तीन भुजाएं और तीन कोण मिलकर त्रिभुज के छः अंग होते हैं।

उदाहरण 12.1 : सम्मुख त्रिभुजाकार चित्र 12.9 में त्रिभुज की भुजाएं, कोण तथा शीर्ष बिन्दुओं के नाम बताइए।

हल : चित्र 12.9 में, ΔPQR की भुजाएं PQ, QR तथा RP हैं और कोण $\angle P$, $\angle Q$ तथा $\angle R$ हैं।

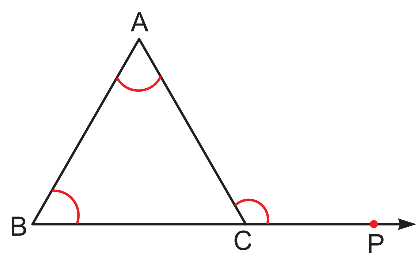
शीर्ष बिन्दु P, Q, R हैं।



चित्र 12.9

यदि त्रिभुज ABC की भुजा BC को P तक बढ़ा दें तो $\angle ACP$ प्राप्त होता है (जैसा कि चित्र 12.10 में दर्शाया गया है)। यह $\angle ACP$ ही त्रिभुज ABC का बहिष्कोण कहलाएगा तथा $\angle A$ और $\angle B$, बहिष्कोण $\angle ACP$ के अभिमुख अंतःकोण कहलाएंगे।

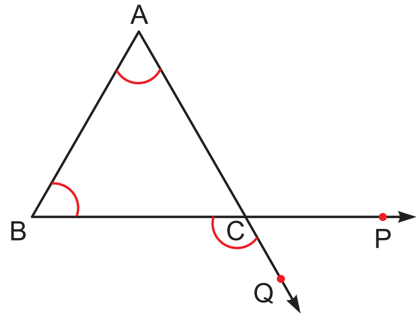
चित्र 12.10 में, $\angle A$ और $\angle B$ बहिष्कोण $\angle ACP$ के अभिमुख अंतःकोण हैं। इसी प्रकार, यदि AC को



चित्र 12.10

टिप्पणी

बिन्दु Q तक बढ़ाएं तो त्रिभुज के शीर्ष पर एक अन्य बहिष्कोण प्राप्त होता है। अब यहां पर हम देखते हैं कि बहिष्कोण $\angle BCQ$ तथा $\angle ACP$, शीर्षाभिमुख कोणों का एक युग्म है। अत: $\angle ACP = \angle BCQ$ है।

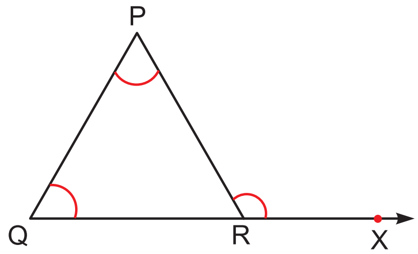


चित्र 12.11

किसी त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष पर दो बहिष्कोण होते हैं, जो आपस में एक-दूसरे के बराबर होते हैं।

उदाहरण 12.2 : चित्र 12.12 में, त्रिभुज की भुजाओं, बहिष्कोण तथा अभिमुख अंत:कोणों के नाम बताइए।

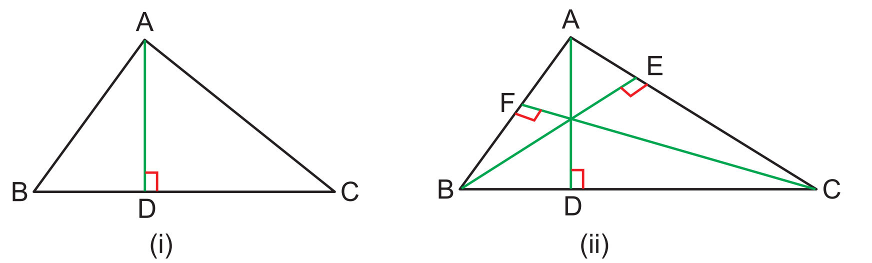
हल : चित्र 12.12 में, ΔPQR की भुजाएं PQ, QR तथा PR हैं। त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु R पर बहिष्कोण $\angle PRX$ है तथा $\angle P$ और $\angle Q$ इस बहिष्कोण के अभिमुख अंत:कोण हैं।



चित्र 12.12

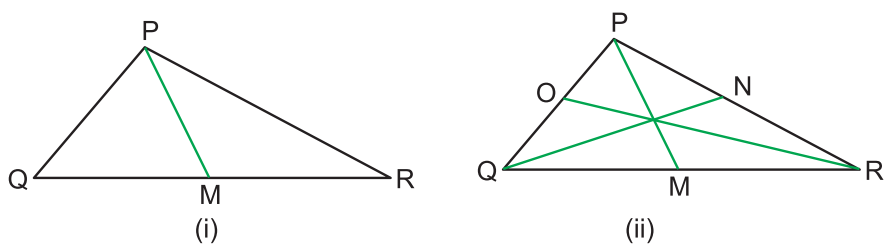
12.4 त्रिभुज के शीर्षलंब और माध्यिकाएं

एक त्रिभुज ABC लीजिए। शीर्ष A से सम्मुख भुजा BC पर लंब AD खींचिए। AD त्रिभुज का एक **शीर्षलंब** कहलाता है (चित्र 12.13(i))। त्रिभुज के **तीन शीर्षलंब** होते हैं (चित्र 12.13ii)। तीनों शीर्षलंब संगामी होते हैं।



चित्र 12.13

अब कोई त्रिभुज PQR लीजिए तथा भुजा QR के मध्य बिन्दु M को सम्मुख शीर्ष P से मिलाइए (चित्र 12.14(i))। रेखाखंड PM त्रिभुज PQR की एक माध्यिका कहलाती है। त्रिभुज की तीन माध्यिकाएं होती हैं, जो संगामी होती हैं (चित्र 12.14(ii))।



चित्र 12.14

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 12.1

1. रिक्त स्थानों में वह शब्द भरिए, जिससे कथन सत्य हो जाए:

   (a) एक त्रिभुज में .... शीर्ष होते हैं।

   (b) एक त्रिभुज में .... भुजाएं होती हैं।

   (c) एक त्रिभुज में .... कोण होते हैं।

   (d) एक त्रिभुज में .... भाग (अंग) होते हैं।

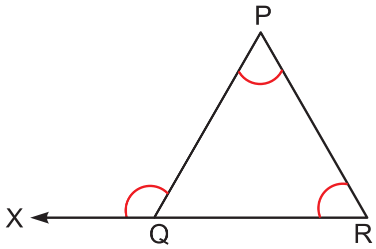
   (e) एक त्रिभुज में .... शीर्षलंब होते हैं।

   (f) एक त्रिभुज में .... माध्यिकाएं होती हैं।

2. अपनी अभ्यास पुस्तिका के किसी पृष्ठ पर तीन संरेखीय बिन्दु P, Q, R लीजिए तथा PQ, QR, RP को मिलाइए। क्या इस प्रकार बना चित्र एक त्रिभुज है? यदि नहीं तो क्यों नहीं?

3. अपनी अभ्यास पुस्तिका के किसी पृष्ठ पर तीन असरेखीय बिन्दु A, B, C लीजिए तथा AB, BC, CA को मिलाइए और इस चित्र का नाम बताइए।

4. चित्र 12.15 में बहिष्कोण तथा उसके अभिमुख अंत:कोण बताइए।



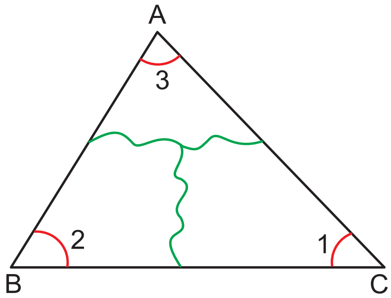
चित्र 12.15

12.5 त्रिभुज के कोणों का योग

हम त्रिभुज के काणों के विषय में पढ़ चुके हैं। अब यहां त्रिभुज के कोणों के योग के बारे में अध्ययन करेंगे।

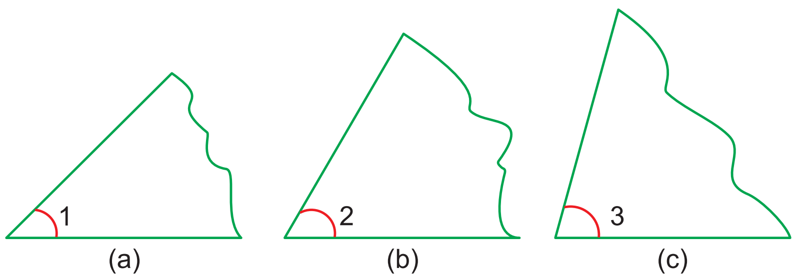
करके सीखिए

कागज का एक टुकड़ा लेकर चित्र 12.16 की भांति एक ΔABC बनाइए तथा उसके तीनों कोणों पर चित्रानुसार निशान लगाएं और उन पर 1, 2, 3 अंकित कीजिए तथा इस त्रिभुजाकार क्षेत्र को कैंची से भुजाओं के अनुदिश तीन टुकड़ों में काटिए।



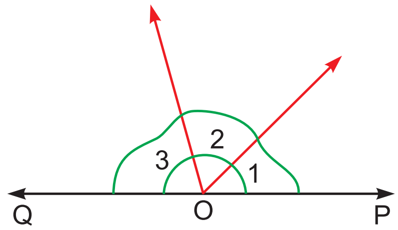
चित्र 12.16

यह तीन टुकड़े अलग-अलग अंत:कोण दर्शाते हैं, जैसा कि चित्र 12.17 से स्पष्ट है।



चित्र 12.17

अब एक रेखा POQ खींचकर इन कटे हुए तीन भागों को इस प्रकार रखिए कि तीनों कोणों के शीर्ष बिन्दु चित्र 12.18 की भांति बिन्दु O पर आ जाएं। इस प्रकार हम देखते हैं कि तीनों कटे हुए भाग एक रेखा बनाते हैं। बिन्दु पर बने कोणों की माप 180° होता है। अतः



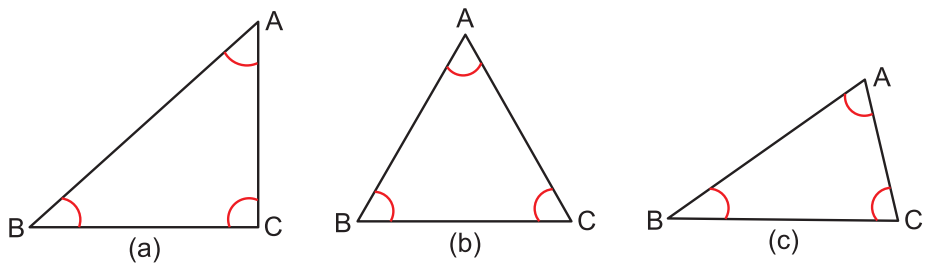
चित्र 12.18

किसी ΔABC में,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

करके सीखिए

चित्र 12.19 की भांति तीन त्रिभुज लीजिए तथा उन्हें (a), (b) व (c) से व्यक्त कीजिए।



चित्र 12.19

अब प्रत्येक त्रिभुज के तीनों कोणों को मापकर निम्न तालिका में लिखिए और उनका योग कीजिए। जिसे S द्वारा दर्शाया गया है।

त्रिभुज	कोणों की माप			योग	180° - S	टिप्पणी
	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$S = \angle A + \angle B + \angle C$		
(a)						
(b)						
(c)						

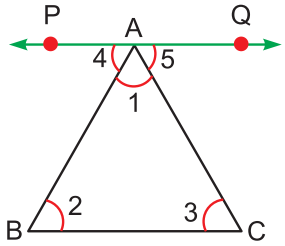
इस प्रकार उपर्युक्त तालिका में हम देखते हैं कि अंतर $180° - S$ शून्य है या इतना कम है, जिसे नगण्य माना जा सकता है। यह नगण्य माना जाने वाला अंतर मापने की अशुद्धियों के कारण भी हो सकता है।

इस प्रकार किसी भी ΔABC में,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

सत्यापन

उपरोक्त प्रयोगों के पश्चात इस निष्कर्ष पर हम निम्न प्रकार भी पहुंच सकते हैं:



चित्र 12.20

चित्र 12.20 के अनुसार एक ΔABC बनाएं तथा उसके कोणों को बिन्दु A पर 1, B पर 2 तथा C पर 3 नाम दें। अब ΔABC की भुजा BC के समांतर बिन्दु A से होती हुई एक रेखा PQ खींचिए। बिन्दु A पर रेखा PQ द्वारा बने शेष कोणों को 4 व 5 नाम दीजिए। इस प्रकार,

चित्र 12.20 से निम्नलिखित जानकारी प्राप्त होती है:

$\angle 2 = \angle 4$ ...(एकांतर कोण)

$\angle 3 = \angle 5$ ...(एकांतर कोण)

$\angle 1 = \angle 1$ ...(उभयनिष्ठ अर्थात् दोनों में सम्मिलित)

उपरोक्त दोनों पक्षों के कोणों का योग अलग-अलग करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है:

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 1 + \angle 5$$

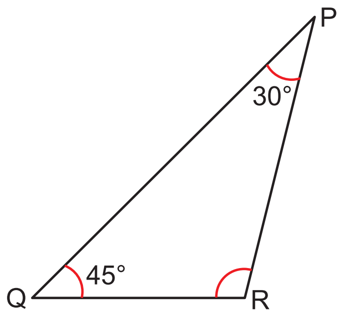
अथवा $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

(क्योंकि $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5$ एक रेखा पर बने आसन्न कोणों का योग है, जो 180° होता है)

$\therefore \quad \angle A + \angle B + \angle C = 180°$

अत: किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है

उदाहरण 12.3 : यदि किसी ΔPQR में $\angle P = 30°$ और $\angle Q = 45°$ हो तो $\angle R$ का मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 12.21

हल : हम ΔPQR का एक रफ चित्र बनाकर उसमें दिए गए कोणों ($\angle P$ और $\angle Q$) के मान लिखते हैं।

हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

अर्थात् ΔPQR में,

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$

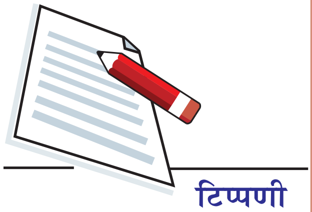
$30° + 45° + \angle R = 180°$ ($\angle P$ तथा $\angle Q$ का दिया गया मान रखने पर)

या $75° + \angle R = 180°$

$\therefore \quad \angle R = 180° - 75°$

या $\angle R = 105°$

अत: ΔPQR के तीसरे $\angle R$ का मान 105° है।



टिप्पणी

उदाहरण 12.4 : किसी त्रिभुज के कोणों का अनुपात 1 : 2 : 3 है। तीनों कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है कि त्रिभुज के कोणों का अनुपात = 1 : 2 : 3

अब माना कि त्रिभुज के कोणों की माप x, 2x, 3x है।

तब त्रिभुज के गुणधर्म, त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180° द्वारा

$$x + 2x + 3x = 180°$$

या $\quad 6x = 180°$

या $\quad x = \dfrac{180°}{6}$

या $\quad x = 30°$

इस प्रकार, त्रिभुज के पहले कोण की माप $= x$
$= 30°$

त्रिभुज के दूसरे कोण की माप $= 2x$
$= 2 \times 30°$
$= 60°$

तथा त्रिभुज के तीसरे कोण की माप $= 3x$
$= 3 \times 30°$
$= 90°$

इस प्रकार त्रिभुज के कोण 30°, 60°, 90° के होंगे।

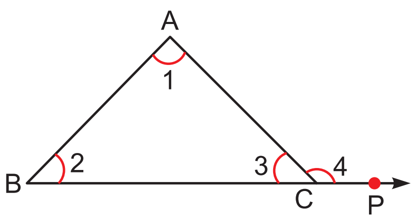
देखें आपने कितना सीखा 12.2

1. किसी त्रिभुज के दो कोणों की माप 75° और 55° हैं। तीसरे कोण की माप ज्ञात कीजिए।
2. किसी त्रिभुज के तीनों कोण परस्पर समान हैं। प्रत्येक की माप ज्ञात कीजिए।
3. किसी त्रिभुज के दो कोणों की माप समान है तथा तीसरा कोण 80° का है। समान कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

12.6 त्रिभुज के बहिष्कोण और उसके अभिमुख अंत:कोण में संबंध

हम त्रिभुज के बहिष्कोण और उसके अभिमुख अंत:कोणों के बारे में पढ़ चुके हैं। यहां इन कोणों में संबंध ज्ञात करेंगे।

चित्र 12.22 में हम देख रहे हैं कि $\angle ACP$, ΔABC का बहिष्कोण तथा $\angle BAC$ और $\angle ABC$, इसके अभिमुख अंत:कोण हैं।



चित्र 12.22

ΔABC में,

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ ...(1) (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

$\angle 3 + \angle 4 = 180°$ ...(2) (रैखिक युग्म)

यहां हम देख रहे हैं कि समीकरण (1) और समीकरण (2) के दायें पक्ष बराबर हैं। अत: बांये पक्ष भी बराबर होंगे।

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4$

या $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ ...(दोनों पक्षों में से $\angle 3$ घटाने पर)

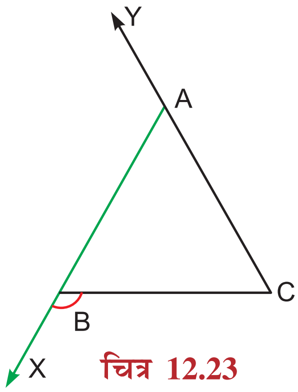
इससे निष्कर्ष निकलता है कि

किसी त्रिभुज का बहिष्कोण उसके अभिमुख अंत:कोणों के योग के बराबर होता है।

उदाहरण 12.5 : चित्र 12.23 में, ΔABC के शीर्ष बिन्दु B पर बहिष्कोण $\angle CBX$ है, इसके

(i) आसन्न अंतकोण व

(ii) अभिमुख अंतकोणों के नाम लिखिए।



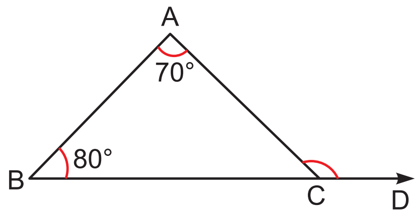
चित्र 12.23

हल : (i) यहां ΔABC के बहिष्कोण $\angle CBX$ का आसन्न अंत:कोण $\angle ABC$ है।

(ii) $\angle CBX$ के अभिमुख अंत:कोण $\angle BAC$ और $\angle ACB$ हैं।

उदाहरण 12.6 : चित्र 12.24 में, बहिष्कोण $\angle ACD$ की माप ज्ञात कीजिए।

हल : चित्र में दिया है कि $\angle A = 70°$ तथा $\angle B = 80°$ जो ΔABC के बहिष्कोण $\angle ACD$ के अभिमुख अंत:कोण हैं। हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज में प्रत्येक बहिष्कोण अपने अभिमुख अंत:कोणों के योग के बराबर होता है।



चित्र 12.24

$$\therefore \angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$$

$$= 70° + 80° \quad \text{(कोणों के मान रखने पर)}$$

$$= 150°$$

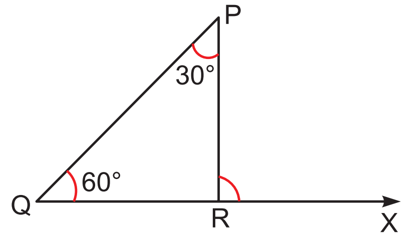
$\therefore$ चित्र में, बहिष्कोण $\angle ACD = 150°$

देखें आपने कितना सीखा 12.3

1. एक त्रिभुज का एक बहिष्कोण 110° तथा एक अभिमुख अंत:कोण 30° का है। त्रिभुज के अन्य कोण ज्ञात कीजिए।

2. चित्र 12.25 में $\angle PRX$ का मान ज्ञात कीजिए।

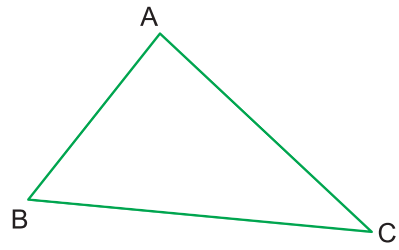
3. किसी त्रिभुज के एक बहिष्कोण की माप 100° है तथा दोनों अभिमुख अंत:कोण समान माप के हैं। इन कोणों की माप ज्ञात कीजिए तथा त्रिभुज के तीसरे कोण की माप भी बताइए।



चित्र 12.25

12.7 त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग

कोई त्रिभुज ABC लीजिए (चित्र 12.26)। इसकी भुजाओं AB, BC और CA को मापिए। क्या $AB + BC > CA$ है? क्या $BC + CA > AB$ है? क्या $CA + AB > BC$ है?



चित्र 12.26

आप पाएंगे कि

त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

देखें आपने कितना सीखा 12.4

1. क्या 3.5 सेमी, 2.5 सेमी और 6 सेमी किसी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाईयां हो सकती हैं?

2. क्या 7.2 सेमी, 3.8 सेमी और 4.3 किसी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाईयां हो सकती हैं?

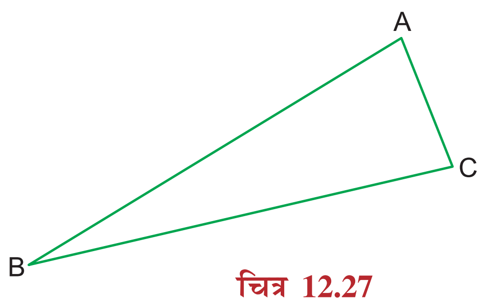
3. क्या 2.9 सेमी, 3.4 सेमी और 6.1 सेमी किसी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाईयां हो सकती हैं?

12.8 त्रिभुजों का वर्गीकरण

(a) भुजाओं के आधार पर

12.8.1 विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triangle)

वह त्रिभुज जिसमें कोई भी दो भुजाएं बराबर न हों, विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triange) कहलाता है। ΔABC एक विषमबाहु त्रिभुज हैं, क्योंकि इस त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाइयां भिन्न-भिन्न हैं (देखिए चित्र 12.27)



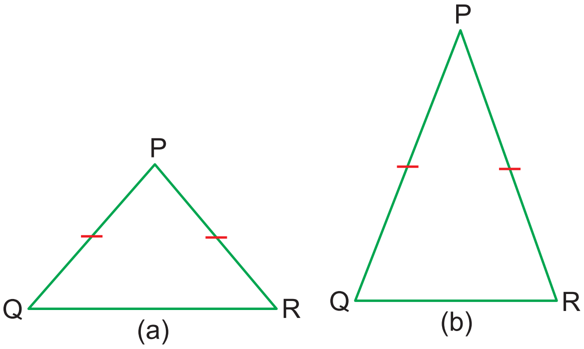
चित्र 12.27

टिप्पणी

12.8.2 समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle)

वह त्रिभुज जिसमें दो भुजाओं की लंबाइयां बराबर होती हैं, समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) कहलाता है। ΔPQR में भुजा PQ तथा भुजा PR की लंबाइयां बराबर हैं (देखिए चित्र 12.28)। अत: यह एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

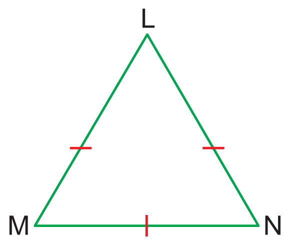
समान भुजाओं को दर्शाने के लिए हम भुजाओं पर कोई एक जैसा चिन्ह लगा देते हैं।



चित्र 12.28

12.8.3 समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)

वह त्रिभुज जिसमें प्रत्येक भुजा की लंबाई बराबर होती है, समबाहु त्रिभुज कहलाता है। ΔLMN में भुजा LM, भुजा MN तथा भुजा LN की लंबाइयां समान हैं। इसलिए यह एक समबाहु त्रिभुज है (देखिए चित्र 12.29)।



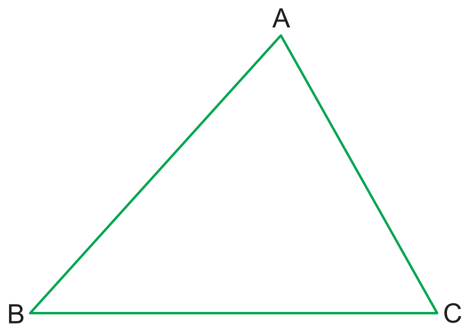
चित्र 12.29

(b) कोणों के आधार पर

किसी त्रिभुज के कोण न्यून, सम अथवा अधिक कोण हो सकते हैं। इन्हीं के आधार पर हम त्रिभुजों को वर्गीकृत करते हैं।

12.1.4 न्यूनकोण त्रिभुज (Acute Angled Triangle)

वह त्रिभुज, जिसके सभी कोण न्यून कोण हों, न्यून कोण त्रिभुज कहलाता है। देखिए चित्र 12.30 में ΔABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है, क्योंकि इसके सभी कोण $\angle ABC$, $\angle ACB$ तथा $\angle BAC$ न्यूनकोण हैं।

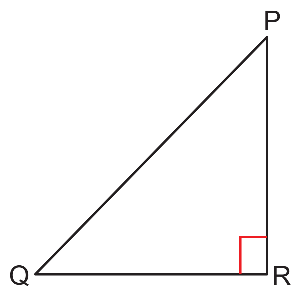


चित्र 12.30

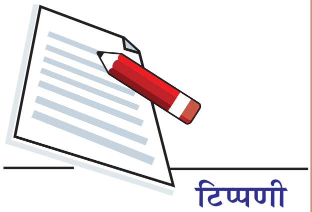
12.1.5 समकोण त्रिभुज (Right Triangle)

वह त्रिभुज, जिसका कोई एक कोण समकोण हो, समकोण त्रिभुज कहलाता है। चित्र 12.31 में ΔPQR एक समकोण त्रिभुज है, क्योंकि इसका एक कोण $\angle PRQ$ समकोण है।

ध्यान दीजिए समकोण दर्शाने के लिए क्या चिह्न प्रयोग किया गया है।

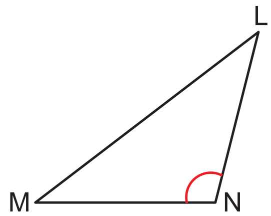


चित्र 12.31



12.8.6 अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse Angled Triangle)

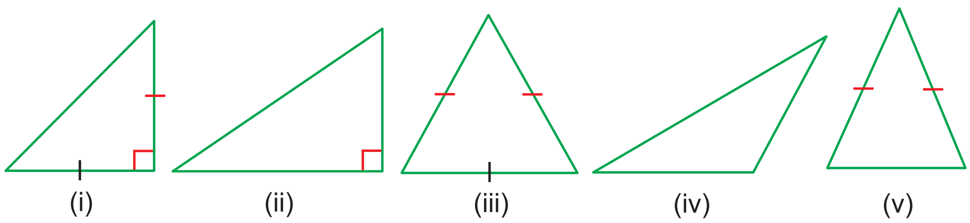
वह त्रिभुज, जिसका एक कोण अधिक कोण हो, अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है। चित्र 12.32 में ΔLMN एक अधिक कोण त्रिभुज है, क्योंकि इसमें $\angle MNL$ एक अधिक कोण है।



चित्र 12.32

देखें आपने कितना सीखा 12.5

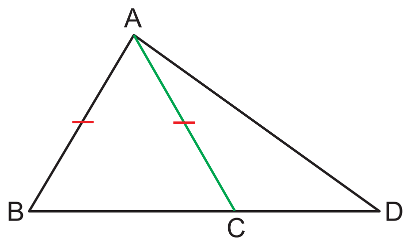
1. भुजाओं की लंबाइयों के आधार पर चित्र 12.33 में दिए त्रिभुजों को वर्गीकृत कीजिए:



चित्र 12.33

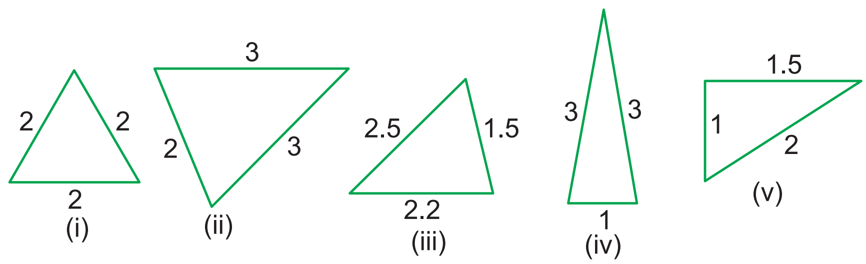
2. कोणों के माप के आधार पर ऊपर दर्शाए गए त्रिभुजों को वर्गीकृत कीजिए।

3. नीचे दी गई आकृति में कुल कितने त्रिभुज हैं? उनके नाम बताइए तथा कोणों के आधार पर वर्गीकृत कीजिए।



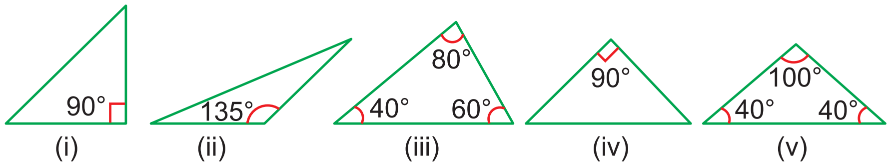
चित्र 12.34

4. चित्र 12.35 में पांच त्रिभुज हैं, जिनकी भुजाओं की माप सेंटीमीटर में लिखे हुए हैं। भुजाओं की लंबाइयों के आधार पर बताइए कि उनमें कौन से विषमबाहु, समद्विबाहु अथवा समबाहु त्रिभुज हैं?



चित्र 12.35

5. चित्र 12.36 में पांच त्रिभुज हैं, जिनके कोणों में से कुछ के माप दर्शाए गए हैं। बताइए कि उनमें कौन से त्रिभुज न्यून कोण, समकोण अथवा अधिक कोण त्रिभुज हैं?



चित्र 12.36

12.9 समद्विबाहु त्रिभुज के गुणधर्म

समद्विबाहु त्रिभुज के निम्नलिखित दो बहुत रोचक गुणधर्म हैं:

(i) बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

(ii) बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं।

हम इन दोनों गुणधर्मों की सत्यता की जांच दो प्रकार से करेंगे–प्रयोग द्वारा (माप कर) और कागज मोड़ने की क्रिया द्वारा।

जब हम किसी समद्विबाहु त्रिभुज को देखते हैं तो ऐसा लगता है कि बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर हैं। वास्तव में है भी ऐसा। इस गुणधर्म का हम निम्न प्रयोग द्वारा सत्यापन करेंगे:

प्रयोग:

त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें $AB = AC = 7$ सेमी तथा $BC = 4$ सेमी हो। $\angle ABC$ तथा $\angle ACB$ को मापिए। यही क्रिया दो अन्य समद्विबाहु त्रिभुजों पर दोहराइए। प्रत्येक स्थिति में त्रिभुज को ΔABC से नामांकित कीजिए तथा $AB = AC$ लीजिए। अपने प्रेक्षणों को निम्न सारणी के रूप में लिखिए:

त्रिभुज की क्रम संख्या	$\angle ABC$	$\angle ACB$
1		
2		
3		

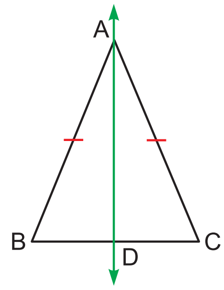
आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $\angle ABC = \angle ACB$ है।

निष्कर्ष : यदि किसी त्रिभुज में दो भुजाएं बराबर हों तो इन भुजाओं के सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

कागज मोड़ने की विधि

प्रयोग : त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें $AB = AC = 7$ सेमी तथा $BC = 4$ सेमी हो। कागज से इस त्रिभुज को काट लीजिए। इसको इस प्रकार मोड़िए कि भुजा AB भुजा AC पर पड़े।

जब AB ठीक AC को ढक लें तो कागज को दबाकर मोड़ का निशान प्राप्त कर लें। कागज को खोलिए तथा मोड़ के निशान पर रेखा AD खींचिए। अब फिर कागज को AD के अनुदिश मोड़िए। ऐसा करने पर आप देखेंगे कि $\angle C$ ने $\angle B$ को पूरा ढक लिया। इसका अभिप्राय है कि $\angle ABD = \angle ACD$ है, अर्थात् $\angle ABC = \angle ACB$ है।



चित्र 12.37

समद्विबाहु त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

12.10 समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों एवं भुजाओं का गुणधर्म

प्रयोग : त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें BC = 6 सेमी तथा $\angle ABC = \angle ACB = 50°$ हो। तथा को मापिए। यही क्रिया विधि दो अन्य त्रिभुजों, जिनमें $\angle ABC = \angle ACB$ हों, में दोहराएं। अपने प्रेक्षणों को निम्न सारणी के रूप में लिखिए:

त्रिभुजों की क्रम संख्या	AB	AC
1		
2		
3		

आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में AB = AC है।

निष्कर्ष : यदि किसी त्रिभुज में दो कोण बराबर हों तो इन कोणों की सम्मुख भुजाएं भी बराबर होती हैं।

टिप्पणी : आपने देखा कि समद्विबाहु त्रिभुज के दोनों गुणधर्मों के कथन एक-दूसरे से विशेष रूप से संबंधित है।

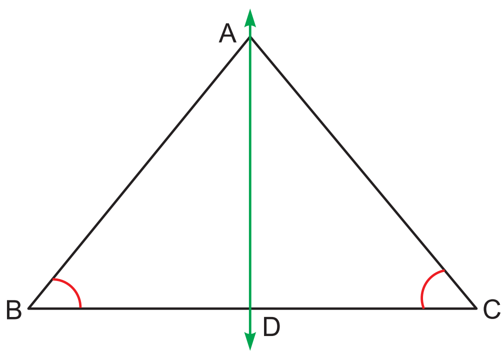
(i) त्रिभुज ABC में यदि AB = AC हो तो $\angle ABC = \angle ACB$ होगा।

(ii) त्रिभुज ABC में यदि $\angle ABC = \angle ACB$ हो तो AB = AC होगा।

ये दोनों 'यदि तो' भांति कथन के हैं। प्रत्येक कथन के दो भाग हैं। कथन (i) में यदि इन भागों को अदल-बदल कर दें तो कथन (ii) प्राप्त हो जाता है। इसी प्रकार कथन (ii) में दोनों भागों का अदल-बदल कर दें तो कथन (i) बन जाता है। ऐसे कथनों को एक-दूसरे का विलोम (Converse) कहते हैं। इसलिए कथन (ii) कथन (i) का तथा कथन (i) कथन (ii) का विलोम है।

कागज मोड़ने की विधि

त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें BC = 6 सेमी तथा $\angle ABC = \angle ACB = 50°$ हो। कागज से इस त्रिभुज को काट लीजिए। इसे बीच से इस प्रकार मोड़िए कि $\angle C$, $\angle B$ पर आ जाए तथा BC के दोनों भाग एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढक लें।



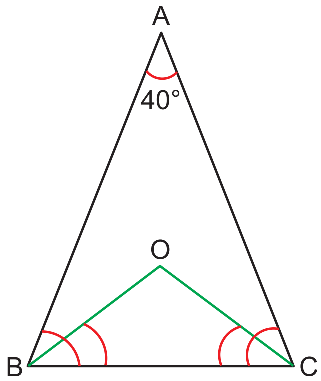
चित्र 12.28

टिप्पणी

आप देखेंगे कि CA तथा BA एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढक रहे हैं। इससे प्रदर्शित होता है कि AB = AC है

यदि किसी त्रिभुज में दो कोण बराबर हों तो उन कोणों की सम्मुख भुजाएं भी बराबर होती हैं।

उदाहरण 12.7 : एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, AB = AC तथा $\angle BAC = 40°$ है। $\angle ABC$ तथा $\angle ACB$ के समद्विभाजक बिन्दु O पर मिलते हैं।



चित्र 12.39

निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\angle ABC$

(ii) $\angle OBC$

(iii) $\angle BOC$

(iv) क्या BO = CO है? यदि हां तो क्यों?

हलः (i) ΔABC में, AB = AC

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$

$\therefore 2\angle ABC + 40° = 180°$

या $2\angle ABC = 140°$

या $\angle ABC = 70°$

अतः $\angle ABC = 70°$

(ii) $\angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC$

$= \frac{1}{2} \times (70°) = 35°$

(iii) इसी प्रकार, $\angle OCB = 35°$ है।

अतः $\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle OCB)$

$= 180° - 70° = 110°$

(iv) ΔOCB में $\angle OBC = \angle OCB$

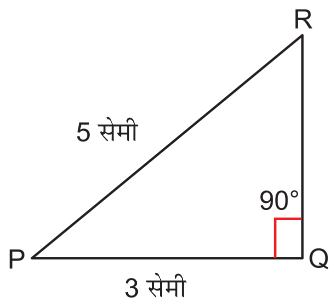
$\therefore BO = OC$

देखें आपने कितना सीखा 12.6

1. त्रिभुज ABC में, $AB = AC$ तथा $\angle BAC = 80°$ है। $\angle ABC$ तथा $\angle ACB$ की माप ज्ञात कीजिए।
2. त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। यदि $\angle ABC = 50°$ है, तो $\angle BAC$ की माप ज्ञात कीजिए।
3. त्रिभुज PQR में, $\angle PQR = \angle PRQ = 50°$ है। बराबर भुजाओं के नाम बताइए।
4. त्रिभुज ABC में, यदि $AB = BC$ है तो बराबर कोणों के नाम लिखिए।

12.11 समकोण त्रिभुज का गुणधर्म (पाइथागोरस प्रमेय)

एक समकोण त्रिभुज PQR खींचिए, जिसमें $\angle Q = 90°$, कर्ण PR = 5 सेमी और भुजा PQ = 3 सेमी हो। तीसरी भुजा QR को मापिए। क्या इसकी लंबाई 4 सेमी है। हां, ऐसा ही है। अब, $PQ^2 + QR^2$ ज्ञात कीजिए। यह $3^2 + 4^2 = 25 = PR^2$ है। अर्थात् इस समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग = अन्य दो भुजाओं के वर्गों का योग है। इस क्रियाकलाप को कोई अन्य लंबाइयां लेकर समकोण त्रिभुज खींचकर दोहराइए। आप पाएंगे कि **प्रत्येक समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है**। इस परिणाम को प्रायः पाइथागोरस प्रमेय कहा जाता है। यह परिणाम **बौधायन प्रमेय** के रूप में भी जाना जाता है।



चित्र 12.40

देखें आपने कितना सीखा 12.7

1. क्या ΔABC समकोण त्रिभुज है, यदि AB = 13 सेमी, BC = 5 सेमी और CA = 12 सेमी है? यदि हां तो इसका कौन-सा कोण समकोण हैं?
2. निम्न में कौन सी भुजाएं एक समकोण त्रिभुज की भुजाएं हो सकती हैं?
   (a) 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी
   (b) 5 सेमी, 6 सेमी और 8 सेमी

आइए दोहराएं

- वह चित्र, जो तीन असंरेख बिन्दुओं में से दो-दो बिन्दुओं को जोड़ने से प्राप्त होता है, त्रिभुज कहलाता है।
- एक त्रिभुज की तीन भुजाएं तथा तीन कोण होते हैं।
- किसी भी त्रिभुज के तीन शीर्ष होते हैं तथा प्रत्येक शीर्ष पर दो बहिष्कोण होते हैं।

- किसी भी त्रिभुज के तीन शीर्ष लंब होते हैं और तीन माध्यिकाएं होती हैं।
- त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180°$ होता है।
- किसी भी त्रिभुज का कोई भी बहिष्कोण अपने दोनों अभिमुख अंत:कोणों के योग के बराबर होता है।
- त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।
- भुजाओं की माप के आधार पर त्रिभुज निम्न प्रकार के होते हैं:

  (i) विषमबाहु त्रिभुज, जिसमें कोई दो भुजाएं बराबर नहीं होती हैं।

  (ii) समद्विबाहु त्रिभुज, जिसमें कोई दो भुजाएं बराबर होती हैं।

  (iii) समबाहु त्रिभुज, जिसमें तीनों भुजाएं बराबर होती हैं।
- कोणों के माप के आधार पर त्रिभुज निम्न प्रकार के होते हैं:

  (i) न्यून कोण त्रिभुज, जिसमें सभी कोण न्यून कोण होते हैं।

  (ii) समकोण त्रिभुज, जिसमें एक कोण समकोण होता है।

  (iii) अधिक कोण त्रिभुज, जिसमें कोई एक कोण अधिक कोण होता है।
- त्रिभुजों की रचना करना (SSS, ASA, SAS और RHS रचनाएं)
- समद्विबाहु त्रिभुज के दो गुणधर्म तथा प्रयोग द्वारा उनका सत्यापन
- समद्विबाहु त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
- त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं।
- समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है। इस परिणाम को पाइथागोरस या बौधायन प्रमेय कहा जाता है।
- इन गुणधर्मो का प्रयोग करके प्रश्न हल करना।

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित में रिक्त स्थान की पूर्ति कर सत्य कथन बनाइए:

   (a) किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग .... होता है।

   (b) किसी त्रिभुज का एक बहिष्कोण अपने दोनों अभिमुख अंत:कोणों के .... बराबर होता है।

   (c) किसी त्रिभुज के तीनों शीर्षलंब .... होते हैं।

   (d) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से .... होता है।

2. किसी त्रिभुज के दो कोण 100° और 45° के हैं। उसका तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।

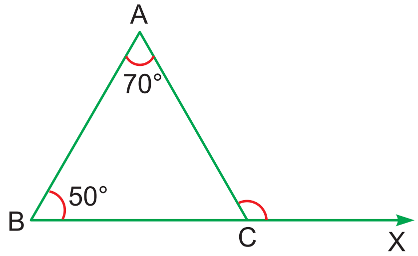
3. किसी त्रिभुज के कोणों में अनुपात 2 : 3 : 4 है। तीनों कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

4. किसी त्रिभुज का एक बहिष्कोण 120° का है और उसके अभिमुख अंत:कोण बराबर हैं। इन बराबर कोणों में से प्रत्येक की माप ज्ञात कीजिए।

5. चित्र 12.41 में दो कोण दर्शाए गए हैं। ∠ACX की माप ज्ञात कीजिए।

6. किसी त्रिभुज का एक बहिष्कोण 80° का है तथा उसके अभिमुख अंत:कोणों में अनुपात 2 : 3 है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

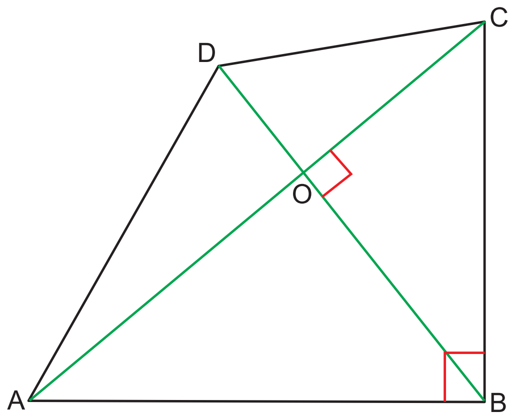
7. विषमबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज तथा समबाहु त्रिभुज की एक-एक आकृति अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनाइए।



चित्र 12.41

8. क्या समबाहु त्रिभुज को समद्विबाहु त्रिभुज कहा जा सकता है? क्या इसका विलोम भी सत्य है?

9. चित्र 12.42 में, आप कितने त्रिभुज देख सकते हैं। इन सभी के नाम लिखिए। यह भी बताइए कि इनमें से कौन से त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज अथवा अधिक कोण त्रिभुज हैं।



चित्र 12.42

10. निम्न की परिभाषा लिखिए:
   (i) विषमबाहु त्रिभुज
   (ii) समबाहु त्रिभुज
   (iii) समद्विबाहु त्रिभुज
   (iv) न्यून कोण त्रिभुज
   (v) समकोण त्रिभुज
   (vi) अधिक कोण त्रिभुज

11. रिक्त स्थानों को भरिए:
   (i) किसी त्रिभुज में बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएं .... होती हैं।
   (ii) समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दोनों भुजाओं के .... के योग के .... होता है।
   (iii) किसी त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण .... होते हैं।

टिप्पणी

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 12.1

1. (a) तीन (b) तीन (c) तीन (d) छह
   (e) तीन (f) तीन
2. नहीं, क्योंकि तीन संरेख बिन्दुओं से त्रिभुज नहीं बनता
3. त्रिभुज
4. बहिष्कोण, $\angle PQX$ अभिमुख अंतःकोण $\angle P, \angle R$

देखें आपने कितना सीखा 12.2

1. $50°$ 2. $60°$ 3. $50°, 50°$

देखें आपने कितना सीखा 12.3

1. $80°, 70°$ 2. $90°$ 3. $50°, 50°, 80°$

देखें आपने कितना सीखा 12.4

1. नहीं 2. हां 3. नहीं

देखें आपने कितना सीखा 12.5

1. विषमबाहु त्रिभुज : ii, iv

   समबाहु त्रिभुज : iii

   समद्विबाहु त्रिभुज : i, v
2. न्यून कोण त्रिभुज : iii, v

   समकोण त्रिभुज : i, ii

   अधिक कोण त्रिभुज : iv
3. $\Delta ABC, \Delta ACD, \Delta ABD$ तीन त्रिभुज हैं।

   न्यून कोण त्रिभुज $= \Delta ABC$

   समकोण त्रिभुज $= \Delta ABD$

   अधिक कोण त्रिभुज $= \Delta ACD$

टिप्पणी

4. विषमबाहु त्रिभुज : iii, v

   समद्विबाहु त्रिभुज : ii, iv

   समबाहु त्रिभुज : i

5. न्यूनकोण त्रिभुज : iii

   समकोण त्रिभुज : i, iv

   अधिक कोण त्रिभुज : ii, v

देखें आपने कितना सीखा 12.6

1. $\angle ABC = \angle ACB = 50°$
2. $\angle BAC = 80°$
3. $PQ = PR$
4. $\angle BAC = \angle BCA$

देखें आपने कितना सीखा 12.7

1. हां, $\angle C = 90°$
2. (a) हां (b) नहीं

आइए अभ्यास करें

1. (a) 180° (b) योग के (c) संगामी (d) बड़ा

2. 35° 3. 40°, 60°, 80° 4. प्रत्येक 60°

5. 120° 6. 32°, 48°, 100°

8. हां, कह सकते हैं। विलोम सत्य नहीं

9. $\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta AOD, \Delta COD$

   $\Delta ADB, \Delta BCD, \Delta ACD$ तथा ΔABC

   न्यून कोण त्रिभुज : ADB, BCD

   समकोण त्रिभुज : BOC, AOD, COD, ABC, AOB

   अधिककोण त्रिभुज : ACD

11. (i) बराबर (ii) वर्गों, बराबर (iii) बराबर

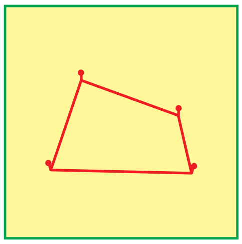
13

चतुर्भुज एवं उसके प्रकार

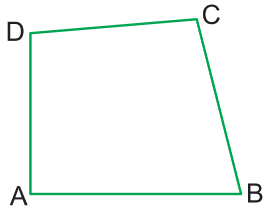
स्मरण करें कि पिछले पाठ में आपने ज्यामिति की उस आकृति का अध्ययन किया था, जिसे त्रिभुज कहते हैं। त्रिभुज तीन रेखाखंडों से बनी एक सरल बंद आकृति होती है। यह भी ध्यान देने योग्य है कि यदि आपके पास एक अथवा दो ही रेखाखंड हों तो इनसे कोई बंद आकृति नहीं बन सकती। किंतु तीन तथा तीन से अधिक रेखाखंडों से ही बंद आकृतियां बनती हैं। इस पाठ में, हम एक ऐसी सरल बंद आकृति की बात करेंगे, जो चार रेखाखंडों से बनती हैं अथवा जिसकी चार भुजाएं होती हैं।

भूमि पर चार बिन्दुओं पर चार खूंटे लगे देखिए। ये बिन्दु इस प्रकार हैं कि इनमें से कोई तीन संरेख नहीं हैं।

एक रस्सी लीजिए और इसे चार खूंटों के गिर्द इस प्रकार घुमाएं कि रस्सी बिल्कुल खिंची हुई हो। इस प्रकार रस्सी द्वारा एक सरल बंद आकृति बन गई (चित्र 13.1)। रस्सी द्वारा चार खूंटों के बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल बंद आकृति तथा ऐसी सभी आकृतियों को चतुर्भुज कहते हैं, क्योंकि इस बंद आकृति की चार भुजाएं हैं। यदि चार खूंटों के बिन्दुओं को क्रमश: A, B, C तथा D से निरूपित करें तो इन्हें कसी हुई रस्सी से मिलाने वाली आकृति को चतुर्भुज ABCD कहते हैं।



चित्र 13.1



चित्र 13.2

दैनिक जीवन में कई बार हम ऐसी वस्तुएं देखते हैं, जो चतुर्भुज के रूप में होती हैं। उदाहरण के लिए, कमरे का फर्श, ब्लैक बोर्ड, पॉसे के पृष्ठीय तल, पतंग, भूमिखंड, सभी चतुर्भुज के आकार के हैं।

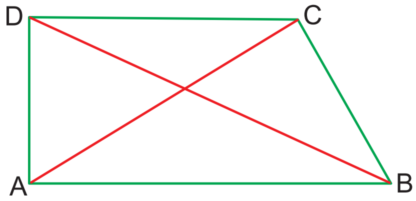
इस पाठ से आप सीखेंगे :

- चतुर्भुज के विभिन्न भाग क्या हैं
- चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है
- विशेष प्रकार के चतुर्भुज, जैसे-समलंब, समांतर चतुर्भुज, आयत, वर्ग तथा समचतुर्भुज, पतंग।

13.1 चतुर्भुज और इसके विभिन्न भाग

आपने देखा कि चार भुजाओं वाली सरल बंद आकृति को चतुर्भुज कहते हैं।

चित्र 13.3 में चतुर्भुज ABCD को देखिए। इसके चार कोने हैं: A, B, C तथा D। इन चार बिन्दुओं को चतुर्भुज के चार शीर्ष बिन्दु कहते हैं।



चित्र 13.3

चतुर्भुज ABCD चार रेखाखण्डों AB, BC, CD और DA से बना है। इन्हें चतुर्भुज की चार भुजाएं कहते हैं।

चतुर्भुज ABCD में चार कोण हैं। ये कोण $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ तथा $\angle CDA$ हैं।

चतुर्भुज के दो विपरीत (सम्मुख) शीर्षों को मिलाने वाले रेखाखंड को चतुर्भुज का विकर्ण कहते हैं।

चित्र 13.3 में A और C तथा B और D चतुर्भुज ABCD के विपरीत (सम्मुख) शीर्ष हैं। अत: इसके दो विकर्ण AC तथा BD हैं।

चतुर्भुज ABCD की चार भुजाएं AB, BC, CD तथा DA हैं।

भुजाओं AB तथा BC की ओर ध्यान दें। बिन्दु B दोनों भुजाओं में है। इन दो भुजाओं को संलग्न (आसन्न) भुजाएं कहते हैं। चतुर्भुज की ओर कौन-कौन सी भुजाएं संलग्न (आसन्न) होंगी?

ये भुजाएं हैं : BC, CD : CD, DA : DA, AB

चतुर्भुज की जो भुजाएं संलग्न नहीं होती, उन्हें विपरीत (सम्मुख) भुजाएं कहते हैं। जैसे- चतुर्भुज ABCD में AB और CD विपरीत (सम्मुख) भुजाएं हैं। ठीक इसी प्रकार BC तथा AD भी विपरीत भुजाएं हैं।

चित्र 13.3 को पुन: देखिए। इसमें कोण $\angle DAB$ तथा $\angle BCD$ ऐसे हैं कि इनकी कोई भी भुजा सांझी नहीं है। ऐसे कोणों को चतुर्भुज के विपरीत (सम्मुख) कोण कहते हैं। आप यह भी कह सकते हैं कि

चतुर्भुज के विपरीत (सम्मुख) शीर्षों पर बने कोण इसके विपरीत (सम्मुख) कोण कहलाते हैं।

चतुर्भुज ABCD में और कौन से कोण विपरीत कोण हैं? ध्यान से देखने पर पता चलता है कि इस चतुर्भुज में $\angle ABC$ तथा $\angle ADC$ विपरीत कोण हैं।

अब आप चतुर्भुज के $\angle DAB$ तथा $\angle ABC$ को देखिए। ये दोनों कोण भुजा AB पर बने हैं। इन्हें चतुर्भुज के आसन्न कोण कहते हैं। इसी प्रकार, चतुर्भुज ABCD में, $\angle ADC$ तथा $\angle BCD$ इसके आसन्न कोण हैं। इसमें दो और आसन्न कोण युग्म हैं? इन्हें भी लिखिए।

त्रिभुज की तरह, एक चतुर्भुज भी अपने तल को तीन भागों में बांटता है। (i) उसका अभ्यंतर (ii) उसका बहिर्भाग तथा (iii) स्वयं वह चतुर्भुज।

देखें आपने कितना सीखा 13.1

1. चित्र 13.4 में, चतुर्भुज PQRS में, इसकी

   (a) सभी भुजाएं लिखिए

   (b) सभी शीर्ष लिखिए

   (c) सभी कोण लिखिए

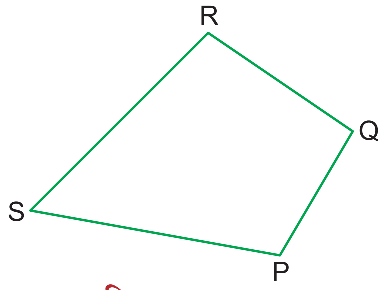
   (d) सभी विकर्ण लिखिए

   (e) संलग्न (आसन्न) भुजाओं के सभी युग्म लिखिए

   (f) विपरीत (सम्मुख) भुजाओं के सभी युग्म लिखिए

   (g) विपरीत (सम्मुख) कोणों के सभी युग्म लिखिए

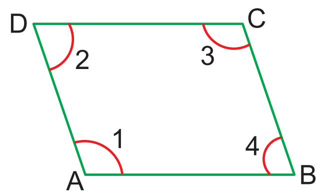
   (h) आसन्न काणों के सभी युग्म लिखिए



चित्र 13.4

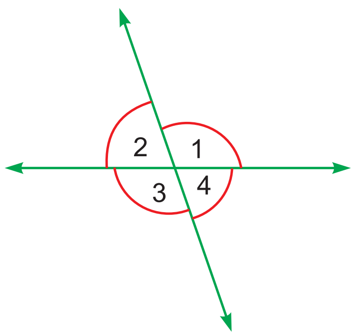
2. किसी चतुर्भुज में कितनी भुजाएं और कितने कोण होते हैं? इसमें कितने शीर्ष और कितने विकर्ण होते हैं? कितनी संलग्न भुजाओं और कितनी विपरीत भुजाओं के युग्म होते हैं? कितने विपरीत कोणों के युग्म होते हैं और कितने युग्म आसन्न कोणों के होते हैं?

13.2 चतुर्भुज के कोणों का योग



चित्र 13.5

चित्र 13.5 को ध्यान से देखें। इसमें चार कोण हैं। अपने कागज के टुकड़े पर इसी प्रकार एक चतुर्भुज बनाइए। इसके चारों कोणों को काटकर साथ-साथ ऐसे रखें, जैसे आकृति 13.6 में दिखाया गया है। आप क्या प्राप्त करते हैं? चारों कोणों का योग 360º है। इस कारण कि चारों कोण एक पूरा चक्कर बनाते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि

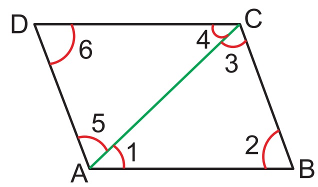


चित्र 13.6

चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360º होता है।

इस तथ्य को आप निम्न प्रकार भी समझ सकते हैं:

चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC खींचिए। आपको दो त्रिभुज ABC तथा ACD मिलते हैं।



चित्र 13.7

पिछले पाठ में आप सीख चुके हैं कि

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \qquad ...(1)$$

इसी प्रकार, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ \qquad ...(2)$

अब $\angle 1 + \angle 5 = \angle DAB$

और $\quad \angle 3 + \angle 4 = \angle BCD$

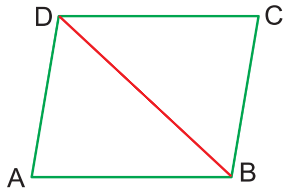
(1) और (2) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$$(\angle 1 + \angle 5) + \angle 2 + (\angle 3 + \angle 4) + \angle 6 = 180^\circ + 180^\circ$$

अथवा $\quad \angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360^\circ$

अत: **चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360º होता है।**

देखें आपने कितना सीखा 13.2



चित्र 13.8

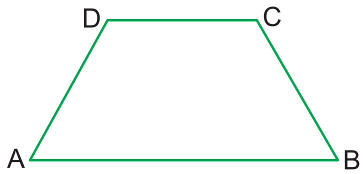
1. चतुर्भुज ABCD (चित्र 13.8) के विकर्ण BD को खींचिए और जांच कीजिए कि

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ है।

13.3 समलंब, समांतर चतुर्भुज, आयत, वर्ग, समचतुर्भुज, पतंग

इस खंड में आपका परिचय कुछ विशेष चतुर्भुजों से होगा।

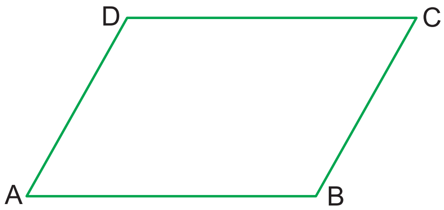
13.3.1 समलंब



चित्र 13.9

चित्र 13.9 में चतुर्भुज ABCD को ध्यान से देखिए। इसकी दो विपरीत (सम्मुख) भुजाएं AB तथा CD समांतर हैं। इनके बीच की लांबिक दूरी सदा समान रहती है। ऐसे चतुर्भुज को समलंब 'समान लंब वाली' कहते हैं। ध्यान दें कि समलंब में दूसरी दो विपरीत (सम्मुख) भुजाएं समांतर भी हो सकती हैं तथा नहीं भी।

13.3.2 समांतर चतुर्भुज



चित्र 13.10

चित्र 13.10 में, ABCD एक ऐसा चतुर्भुज है, जिसकी सभी विपरीत (सम्मुख) भुजाएं समांतर हैं। इसे समांतर चतुर्भुज कहते हैं।

ऐसे चतुर्भुज जिसकी सभी विपरीत (सम्मुख) भुजाएं समांतर हों, समांतर चतुर्भुज होते हैं। समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

ध्यान दें कि सभी समलंब समांतर चतुर्भुज नहीं होते, परंतु सभी समांतर चतुर्भुज समलंब होते हैं।

13.3.3 आयत

चित्र 13.11

चित्र 13.11 में चतुर्भुज ABCD, ऐसा चतुर्भुज है, जिसके सभी कोण समकोण हैं। ध्यान से देखें तो आप भुजाओं AB, CD तथा AD, BC को समांतर तथा बराबर पाएंगे। इस चतुर्भुज को आयत कहते हैं।

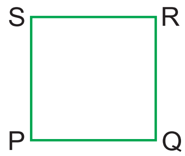
जिस चतुर्भुज के सभी कोण समकोण हों आयत कहलाता है।

ध्यान देने योग्य है कि आयत की विपरीत (सम्मुख) भुजाएं समांतर और बराबर होती हैं और इसके सभी कोण बराबर होते हैं।

आयत के विकर्ण बराबर होते हैं तथा परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

13.3.4 वर्ग

चित्र 13.12 में चतुर्भुज PQRS को देखिए। यह एक आयत है, क्यों? इसकी एक और विशेषता भी है। इसकी चारों भुजाएं भी समान हैं।



चित्र 13.12

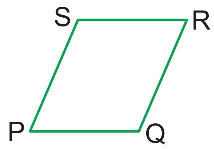
जिस चतुर्भुज की सभी भुजाएं समान हों और सभी कोण समकोण हों, वर्ग कहलाता है।

ध्यान दें कि एक वर्ग सदा आयत भी होता है। परंतु प्रत्येक आयत वर्ग नहीं होता।

वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं तथा परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

13.3.5 समचतुर्भुज

चित्र 13.13 में चतुर्भुज PQRS ऐसा है कि इसकी सभी भुजाएं बराबर हैं, किंतु इसके कोण समकोण नहीं हैं। ये समकोण हो भी सकते हैं। ऐसे चतुर्भुज को समचतुर्भुज कहते हैं।



चित्र 13.13

समान भुजाओं वाले चतुर्भुज को समचतुर्भुज कहते हैं।

याद रखें, प्रत्येक वर्ग समचतुर्भुज होता है, परंतु समचतुर्भुज वर्ग हो भी सकता है और नहीं भी।

इस प्रकार वर्ग, आयत भी होता है और समचतुर्भुज भी।

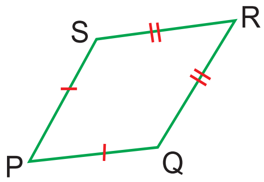
टिप्पणी : समचतुर्भुज की विपरीत (सम्मुख) भुजाएं समांतर होती हैं।

समचतुर्भुज में विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

13.3.6 पतंग

चित्र 13.14 में PQRS ऐसा चतुर्भुज है, जिसमें आसन्न भुजाएं PQ और PS बराबर हैं तथा RS और RQ बराबर हैं।

इसे पतंग (Kite) कहते हैं। ध्यान दें कि प्रत्येक समचतुर्भुज पतंग होता है तथा प्रत्येक पतंग समचतुर्भुज नहीं होती।



चित्र 13.14

देखें आपने कितना सीखा 13.3

1. (a) क्या प्रत्येक समलंब, समांतर चतुर्भुज होता है?

   (b) क्या प्रत्येक आयत वर्ग होता है?

   (c) क्या प्रत्येक वर्ग समचतुर्भुज होता है?

   (d) क्या प्रत्येक समचतुर्भुज वर्ग होता है?

(e) एक ऐसा समलंब बनाइए, जो समांतर चतुर्भुज न हो।

(f) एक ऐसा समांतर चतुर्भुज बनाइए, जो आयत न हो।

(g) एक ऐसा समचतुर्भुज बनाइए, जो वर्ग न हो।

(h) एक ऐसी पतंग बनाइए, जो समचतुर्भुज न हो।

आइए दोहराएं

- चार भुजाओं वाली बंद आकृति को चतुर्भुज कहते हैं।
- चतुर्भुज के चार कोण, चार शीर्ष, दो विकर्ण होते हैं।
- चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।
- वर्ग, आयत, समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, पतंग तथा समलंब चतुर्भुज होते हैं।
- आयत के विकर्ण बराबर होते हैं तथा परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
- वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं तथा परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
- समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं तथा सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
- समचतुर्भुज में विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

आइए अभ्यास करें

1. निम्न प्रश्नों के उत्तर कारण सहित दीजिए:

   (a) क्या वर्ग एक आयत होता है?

   (b) क्या वर्ग एक समचतुर्भुज होता है?

   (c) क्या समचतुर्भुज सदा वर्ग होता है?

   (d) क्या समांतर चतुर्भुज सदा वर्ग होता है?

   (e) किस परिस्थिति में समलंब, समांतर चतुर्भुज बन जाएगा?

   (f) किस परिस्थिति में समांतर चतुर्भुज आयत बन जाएगा?

2. चतुर्भुज के चारों कोणों का योग कितना होता है?

3. ऐसे वर्ग की रचना कीजिए, जिसक क्षेत्रफल 9 वर्ग सेमी है।

4. रिक्त स्थानों को भरिए:

   (a) समांतर चतुर्भुज में भुजाएं .... होती हैं।

   (b) समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण .... होते हैं।

   (c) यदि आयत का एक विकर्ण 12 सेमी है तो उसका दूसरा विकर्ण .... सेमी होगा।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 13.1

1. (a) PQ, QR, RS, SP

   (b) P, Q, R, S

   (c) $\angle SPQ$, $\angle PQR$, $\angle QRS$, $\angle RSP$

   (d) PR, SQ

   (e) SP, PQ ; PQ, QR ; QR, RS ; RS, SP

   (f) SP, QR ; PQ, RS

   (g) $\angle SPQ$, $\angle QRS$; $\angle RSP$, $\angle PQR$

   (h) $\angle RSP$, $\angle SPQ$; $\angle SPQ$, $\angle PQR$; $\angle PQR$, $\angle QRS$; $\angle QRS$, $\angle RSP$

2. 4 भुजाएं, 4 कोण, 4 शीर्ष, 2 विकर्ण, 4 संलग्न भुजाओं के युग्म, 2 विपरीत भुजाओं के युग्म, 2 विपरीत कोणों के युग्म तथा आसन्न कोणों के 4 युग्म।

आइए अभ्यास करें

1. (a) हां, क्योंकि इसका प्रत्येक कोण 90° का होता है।

   (b) हां, क्योंकि इसकी चारों भुजाएं बराबर होती हैं।

   (c) नहीं, इसका कोण 90° से भिन्न का हो सकता है।

   (d) नहीं, इसका कोण 90° से भिन्न का हो सकता है।

   (e) जब इसकी सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म भी समांतर है।

   (f) जब इसका एक कोण 90° का हो।

2. 360°

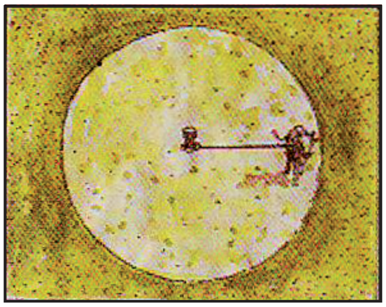
4. (a) बराबर (b) बराबर (c) 12

14

वृत्त

आपने गांव के लोगों को पशुओं को सुबह गांव के बाहर चरने के लिए ले जाते देखा होगा। वे पशुओं को रस्सी से बांध देते हैं तथा रस्सी को एक खूंटे से बांध देते हैं, जो भूमि में गड़ा होता है।

आप अचंभा कर रहे होंगे कि बंधे होने के पश्चात् भी पशु कैसे चर लेते हैं। पशु अधिकतम कितना क्षेत्रफल चर लेते हैं? क्या आप कह सकते हैं कि उस क्षेत्र, जिस पर वे चर रहे हैं, का क्या स्वरूप होगा?

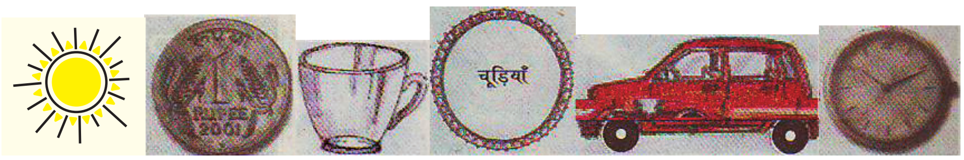


चित्र 14.1

यदि आप ध्यान से देखेंगे कि रस्सी पशुओं को एक वृत्ताकार क्षेत्र में ही घूमने की स्वतंत्रता देती है (चित्र 14.1)। आप देखेंगे कि उस क्षेत्र का घेरा तभी प्राप्त होता है, जबकि पशु खिंची रस्सी द्वारा घूमते हैं।

अतः आप कह सकते हैं कि वह क्षेत्र, जिस पर अधिकतम घास पशु चर सकते हैं, वृत्ताकार होगा।

दिन-प्रतिदिन के जीवन में आप कई वस्तुओं को देखते हैं, जो वृत्ताकार हैं। उदाहरणतया, सूर्य, पूर्ण चन्द्रमा, प्लेटें, थालियां, प्याले के ऊपरी हिस्से का घेरा, विभिन्न सिक्के (जैसे 5 रुपये, 1 रुपये, 50 पैसे, 25 पैसे के सिक्के), कार के पहिए तथा साइकिल के पहिए।



चित्र 14.2

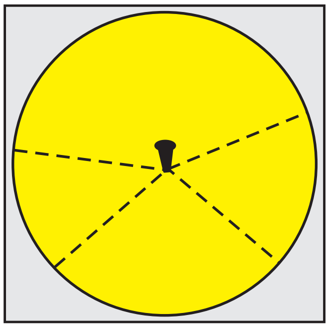
इस पाठ से आप सीखेंगे :

- वृत्त के भिन्न हिस्से तथा अवयवों के विषय में
- दी गई त्रिज्या का वृत्त खींचने के विषय में
- अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है

टिप्पणी

14.1 वृत्त के हिस्से तथा अवयव

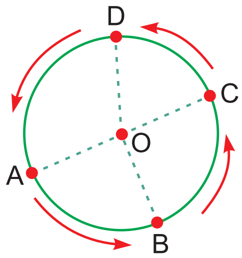
यदि आप चित्र 14.3 को ध्यान से देखें तो आप पाएंगे कि खूंटे से घेरे पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की दूरी सदा समान है। अतः हम कह सकते हैं, वृत्त उन बिन्दुओं का समूह है, जो किसी स्थिर बिन्दु (यहां खूंटे है) से तल में सदा समान दूरी पर होते हैं।



चित्र 14.3

आइए हम स्थिर बिन्दु (जहां खूंटा स्थित है) को O द्वारा दर्शाते हैं तथा घेरे पर चार बिन्दु A, B, C तथा D लेते हैं। तब OA = OB = OC = OD है।

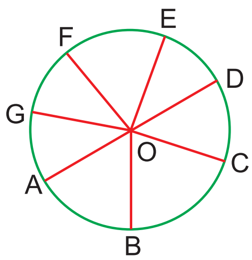
घेरे की माप को वृत्त की परिधि कहते हैं तथा स्थिर दूरी को त्रिज्या कहते हैं। अतः त्रिज्या 'r' = OA = OB = OC = OD। दूसरे शब्दों में, वृत्त का परिमाप उसकी परिधि कहलाता है। इसे प्रायः C द्वारा प्रदर्शित करते हैं, यदि आप बिन्दु A (चित्र 14.4) से चलना प्रारंभ कर घेरे के साथ-साथ चलकर बिन्दु B पर पहुंचते हैं, फिर C पर फिर D पर तथा अंत में फिर बिन्दु A पर तो तय की गई पूरी दूरी वृत्त की परिधि के समान होती है।



चित्र 14.4

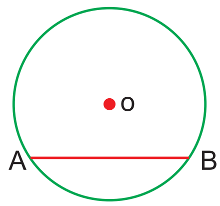
वृत्त के केंद्र तथा वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु के बीच की दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।

वृत्त की त्रिज्या को प्रायः r से प्रदर्शित करते हैं। चित्र 14.4 में O वृत्त का केंद्र है, OA, OB, OC तथा OD सब वृत्त की त्रिज्याएं हैं। एक वृत्त की कितनी भी त्रिज्याएं हो सकती हैं, लेकिन सभी त्रिज्याएं समान लंबाई की होती हैं। चित्र 14.5 में आप सभी त्रिज्याओं को माप कर देख सकते हैं कि उनकी लंबाइयां समान हैं।



चित्र 14.5

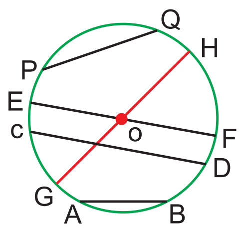
अब, वृत्त पर कोई दो बिन्दु A तथा B लीजिए (देखिए चित्र 14.6)। यदि आप इन बिन्दुओं को मिलाएं तो आपको रेखाखंड AB मिलता है।



चित्र 14.6

वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को वृत्त की जीवा कहते हैं।

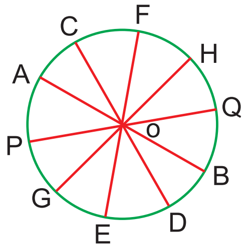
चित्र 14.6 में AB वृत्त की जीवा है, क्योंकि वृत्त पर अनगिनत बिन्दु स्थित हैं, अतः वृत्त की अनंत जीवाएं हो सकती हैं। चित्र 14.7 में, AB, CD, EF, GH तथा PQ जीवाएं हैं, लेकिन जीवाएं EF तथा GH विशेष प्रकार की हैं। क्या आप कह सकते हैं कि यह दूसरी जीवाओं से किस प्रकार भिन्न हैं? जीवाएं GH तथा EF वृत्त के केंद्र O से होकर जाती हैं। आप जांच कर सकते हैं कि जीवाएं EF तथा GH अधिकतम लंबाई की जीवाएं हैं। शेष सब जीवाएं, जो O से होकर नहीं जाती, कम लंबाई की हैं।



चित्र 14.7

वृत्त के केंद्र से होकर जाने वाली जीवा वृत्त का व्यास कहलाती है।

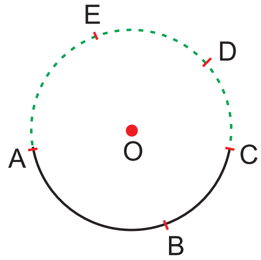
अत: व्यास वृत्त की अधिकतम लंबाई की जीवा है। आप जांच कर सकते हैं कि व्यास की लंबाई त्रिज्या की दुगुनी है। अत: **व्यास = 2 × त्रिज्या** चित्र 14.7 में, EF तथा GH वृत्त के दो व्यास हैं। यहां EF = GH = 2GO = 2r है। जैसा कि चित्र 14.8 में दिखाया गया है, एक वृत्त के कितने भी व्यास हो सकते हैं, जैसे AB, CD, EF, GH तथा PQ वृत्त के व्यास हैं, जिसका केंद्र O है।



चित्र 14.8

वृत्त के किसी भाग को उसका चाप कहते हैं।

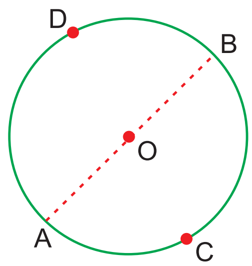
चित्र 14.9 में गहरी रेखा द्वारा दिखाया भाग ABC वृत्त का चाप है। इसी प्रकार, CDEA भी वृत्त का चाप है। छोटे चाप CD, DE, EA तथा DEA तथा गहरी दिखाए गए AB, BC सब वृत्त के चाप हैं। एक चाप को प्राय: '$\frown$' द्वारा दर्शाया जाता है।



चित्र 14.9

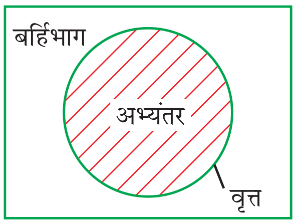
अत:, चाप ABC तथा चाप CDEA को $\overset{\frown}{ABC}$ तथा $\overset{\frown}{CDEA}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

अब आप चाप ACB तथा ADB को चित्र 14.10 में देखिए। आप क्या देखते हैं? क्या वह विशेष प्रकार के हैं? यदि आप इनके अंत: बिन्दुओं A तथा B को मिलाएं तो वह वृत्त के केंद्र O से होकर जाता है। हम पहले ही कह चुके हैं कि वृत्त के केंद्र से होकर जाने वाली जीवा को वृत्त का व्यास कहते हैं। अत: AB वृत्त का व्यास है (देखिए चित्र 14.10)।



चित्र 14.10

वह चाप, जिसके अंत:बिन्दु एक व्यास के अंत:बिन्दु भी हों, अर्धवृत्त कहलाता है। अत: चित्र 14.10 में, ACB तथा ADB अर्धवृत्त हैं। प्रत्येक सरल बंद आकृति (त्रिभुज, चतुर्भुज) की तरह, एक वृत्त भी अपने तल को तीन भागों में बांटता है (देखिए चित्र 14.11)।



चित्र 14.11

(i) उसका अभ्यंतर,

(ii) उसका बहिर्भाग तथा

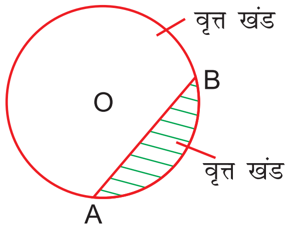
(iii) स्वयं वह वृत्त।

वृत्त के अभ्यंतर और वृत्त को मिलाकर उसका वृत्तीय क्षेत्र या **वृत्ताकार (circular region)** कहा जाता है।

यदि आप व्यास AB को चित्र 14.10 में देखिए तो आप पाएंगे कि यह वृत्ताकार क्षेत्र को दो समान भागों में बांटता है। प्रत्येक भाग को अर्धवृत्ताकार क्षेत्र कहते हैं।

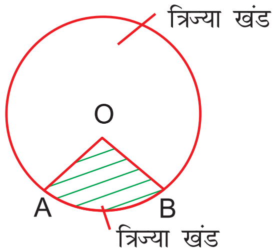
टिप्पणी

दूसरे शब्दों में, आप कह सकते हैं कि एक अर्धवृत्ताकार क्षेत्र एक व्यास तथा एक चाप, जिसके अंत:बिन्दु व्यास के अंत:बिन्दु हैं, द्वारा घिरा होता है। चित्र 14.10 में, ACBOA तथा AOBDA दो अर्धवृत्ताकार क्षेत्र हैं।



चित्र 14.12

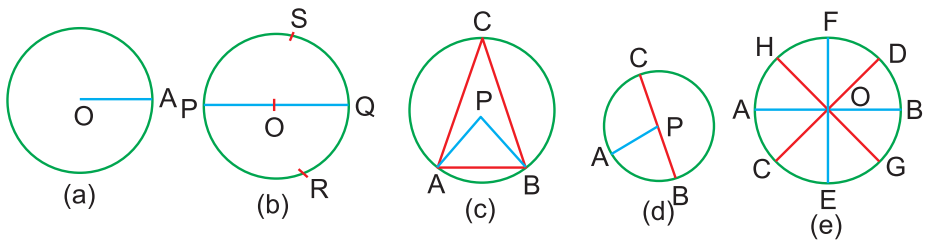
एक वृत्त लेकर उसकी जीवा AB खींचिए (चित्र 14.12)। यह जीवा वृत्ताकार क्षेत्र को दो भागों में बांटती है। प्रत्येक भाग एक **वृत्तखंड (Segment of a Circle)** कहलाता है। चित्र में एक भाग छायांकित है और दूसरा अछायांकित है।



चित्र 14.13

अब एक वृत्त की दो त्रिज्याएं OA और OB खींचिए (चित्र 14.13)। त्रिज्याएं OA और OB भी वृत्ताकार या वृत्तीय क्षेत्र को दो भागों में बांट देती हैं। प्रत्येक भाग एक त्रिज्यखंड (sector) कहलाता है।

उदाहरण 14.1 : नीचे दिए गए चित्रों में केंद्र, त्रिज्या, व्यास, जीवा, चाप, अर्धवृत्त तथा अर्धवृत्ताकार क्षेत्र के नाम बताइए:



चित्र 14.14

हल : (a) केंद्र O है तथा त्रिज्या OA है।

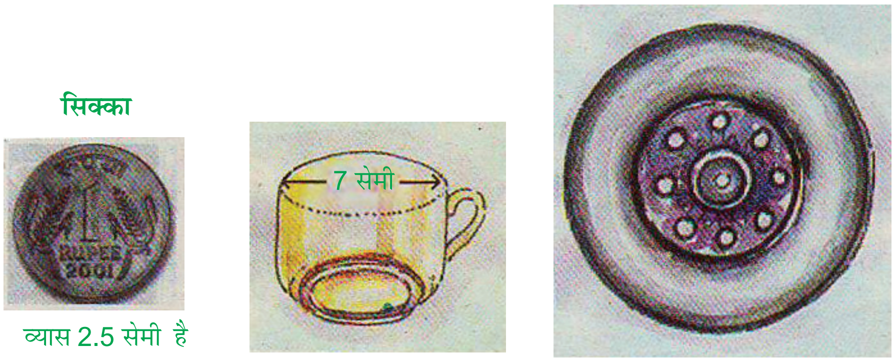
(b) केंद्र O है, OP तथा OQ त्रिज्याएं हैं तथा PQ एक व्यास है। PS, PR, QS, SR, RPS तथा RQS चाप हैं। दो अर्धवृत्त PRQ तथा PSQ हैं। PRQOP तथा POQSP दो अर्धवृत्ताकार क्षेत्र हैं।

(c) P केंद्र है तथा PA तथा PB त्रिज्याएं। AB, BC तथा AC जीवाएं हैं। $\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{CAB}, \overset{\frown}{ABC}$ तथा $\overset{\frown}{BCA}$ चाप हैं।

(d) P केंद्र है, AP, BP तथा CP त्रिज्याएं है तथा BC एक व्यास है। $\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{ACB}$ चाप हैं तथा BAC एक अर्धवृत्त है। BACPB एक अर्धवृत्ताकार क्षेत्र है।

(e) O केंद्र है। AB, CD, EF तथा GH व्यास हैं।

उदाहरण 14.2 : नीचे दी गई आकृतियों में त्रिज्या का परिकलन कीजिए:



चित्र 14.15

हल : (a) व्यास = 2 × त्रिज्या

$\therefore$ त्रिज्या $= \dfrac{\text{व्यास}}{2}$

सिक्के का व्यास 2.5 सेमी है।

$\therefore$ त्रिज्या $= \dfrac{2.5}{2}$ सेमी = 1.25 सेमी

(b) हम जानते हैं कि व्यास = 2 × त्रिज्या

अतः त्रिज्या $= \dfrac{\text{व्यास}}{2}$

अतः ऊपरी भाग की त्रिज्या $= \dfrac{7}{2}$ सेमी= 3.5 सेमी

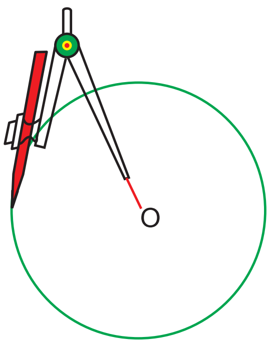
(c) पहिए का व्यास = 1.4 मीटर

अतः उसकी त्रिज्या $= \dfrac{1.4}{2}$ मीटर = 0.7 मीटर

14.2 एक वृत्त की रचना करना

एक ज्यामिति यंत्र, जिसे वृत्त खींचने के लिए प्रयोग में लाते हैं, **परकार** कहलाता है।

परकार का सुई वाले भाग को कागज के बिन्दु O पर स्थितर रखकर तथा पैंसिल वाले भाग को चारों ओर घुमाने पर एक वृत्त की रचना होती है, जैसा कि चित्र 14.16 में दिखाया गया है।



चित्र 14.16

14.2.1 दी गई त्रिज्या का वृत्त खींचना

माना आपको 5 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचना है। उसके लिए आपको निम्न पद अपनाने होंगे:

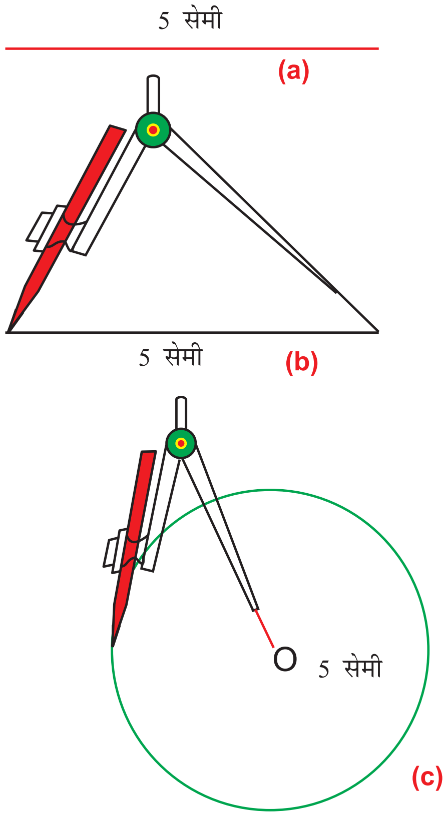
पद 1 : फुटे की सहायता से 5 सेमी एक लंबा रेखाखंड खींचिए (चित्र 14.17(a)।

पद 2 : कागज पर एक बिन्दु O अंकित कीजिए।

पद 3 : परकार को इतना खोलिए कि उसके सुई वाले भाग तथा पैंसिल वाले भाग में 5 सेमी की दूरी हो (चित्र 14.17(b)।

पद 4 : परकार के सुई वाले भाग को बिन्दु O पर रखिए।

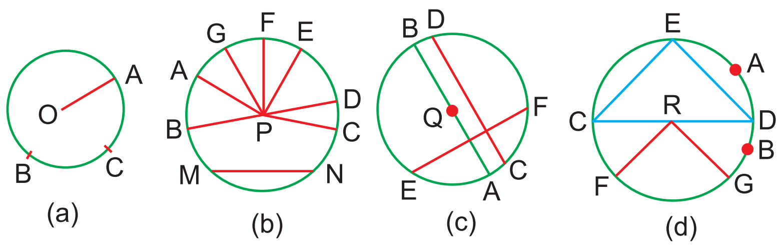
पद 5 : पैंसिल वाले भाग को O के चारों ओर घुमाएं। चित्र 14.17 (c) में 5 सेमी त्रिज्या का खींचा गया वृत्त है।



चित्र 14.17

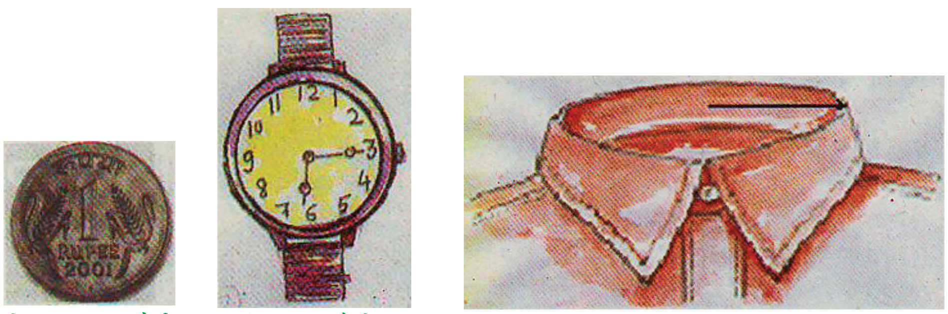
देखें आपने कितना सीखा 14.1

1. चित्र 14.18 में केंद्र, त्रिज्या, व्यास, जीवा, चाप, अर्धवृत्त तथा अर्धवृत्ताकार क्षेत्र ज्ञात कीजिए:



चित्र 14.18

2. निम्न वृत्तों में व्यास की लंबाई ज्ञात कीजिए:



त्रिज्या: 1.25 सेमी
(a)

त्रिज्या: 4 सेमी
(b)

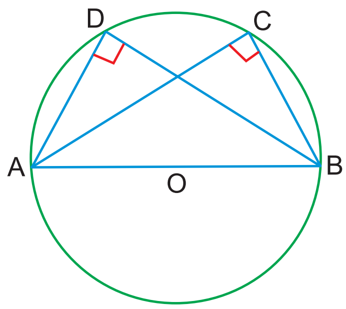
त्रिज्या: 7.2 सेमी
(c)

चित्र 14.19

टिप्पणी

14.3 अर्धवृत्त में कोण की माप

एक वृत्त खींचिए, जिसका केंद्र O है तथा AB एक व्यास है, जैसा कि चित्र 14.20 में दिखाया गया है। अर्धवृत्त पर दो बिन्दु C तथा D लीजिए। DA, DB तथा CA, CB को मिलाइए तथा क्रमश: $\angle ADB$ तथा $\angle ACB$ प्राप्त कीजिए।

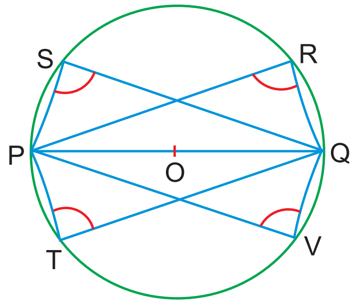


चित्र 14.20

अब इन कोणों को चांदे की सहायता से मापिए (आपने कोणों को चांदे की सहायता से मापना 'कोण' वाले पाठ 16 में सीखा है)। आपने क्या पाया? आप देखेंगे कि प्रत्येक कोण की माप 90º है, अर्थात् प्रत्येक कोण समकोण है।

अत: $\angle ADB = 90° = \angle ACB$ है।

यदि अर्धवृत्त पर आप कुछ और कोण लें, जैसा कि चित्र 14.21 में दिखाए गए हैं, तो आप पाएंगे कि प्रत्येक की माप 90º है।



चित्र 14.21

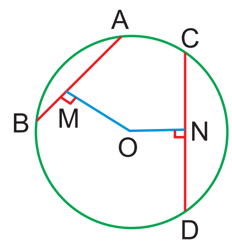
$\therefore \angle PRQ = \angle PSQ = \angle PTQ = \angle PVQ = 90°$

अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि अर्धवृत्त में बना प्रत्येक कोण समकोण है।

अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।

14.4 वृत्त की जीवाओं की केंद्र से दूरियां

केंद्र O का कोई वृत्त खींचिए और उसकी कोई दो जीवाएं AB और CD खींचिए (चित्र 14.22)।



चित्र 14.22

O से AB और CD पर क्रमश: लंब OM और ON डालिए।

AB, CD, OM और ON को मापिए।

आप क्या देखते हैं? आप देखते हैं कि $AB < CD$ है तथा $OM > ON$ है। अर्थात् **वृत्त की बड़ी जीवा केंद्र के अधिक निकट होती है।**

आइए दोहराएं

- वृत्त तल में ऐसे बिन्दुओं का समूह है, जो एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर होते हैं।
- वृत्त के परिमाप को उसकी परिधि कहते हैं।
- वृत्त के केंद्र तथा वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु के बीच की दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं।
- वृत्त की असंख्य त्रिज्याएं हो सकती हैं।

- वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को वृत्त की जीवा कहते हैं।
- केंद्र से होकर जाने वाली जीवा को व्यास कहते हैं।
- कोई भी व्यास वृत्त की अधिकतम लंबाई वाली जीवा है।
- वृत्त के असंख्य व्यास हो सकते हैं।
- व्यास = $2 \times$ त्रिज्या
- वृत्त के किसी भाग को एक चाप कहते हैं।
- एक व्यास के अंतबिन्दु उस वृत्त को दो समान भागों में बांटते हैं। प्रत्येक भाग को अर्धवृत्त कहते हैं।
- अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।
- बड़ी जीवा केंद्र के अधिक निकट होती है।

आइए अभ्यास करें

1. निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति कथनों को सत्य बनाते हुए कीजिए:

   (a) एक वृत्त का .... केंद्र है।

   (b) व्यास वृत्त की .... जीवा है।

   (c) वृत्त का व्यास वृत्त की त्रिज्या का .... है।

   (d) वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को .... कहते हैं।

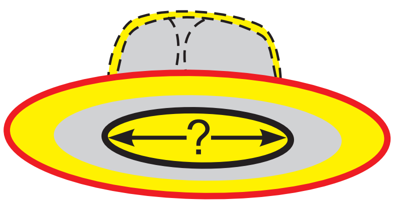
   (e) वृत्त के केंद्र से होकर जाने वाली जीवा को .... कहते हैं।

   (f) अर्धवृत्त में बना कोई कोण .... होता है।

2. भिन्न प्रकार के हैटों (टोपों) (चित्र 14.23) के व्यास माप निम्न हैं:

   (a) 18 सेमी (b) 21 सेमी
   (c) 24 सेमी

   प्रत्येक प्रकार के हैट की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



चित्र 14.23

3. निम्न त्रिज्याओं के वृत्त खींचिए:

   (a) 4 सेमी (b) 6 सेमी

4. DE और PQ वृत्त की दो जीवाएं इस प्रकार हैं कि DE = 8 सेमी और PQ = 6 सेमी है। कौन-सा जीवा केंद्र से अधिक दूरी पर है?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 14.1

1. (a) केन्द्र : O ; त्रिज्या : OA ; चाप : $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{BAC}$, $\overset{\frown}{ACB}$

   (b) केन्द्र : P ; त्रिज्या : PA, PB, PC, PD, PE, PF तथा PG ;

   जीवा : MN ; चाप : $\overset{\frown}{BAG}$, $\overset{\frown}{NCDE}$ इत्यादि

   (c) केन्द्र : Q ; व्यास : AB ; जीवा : CD, EF ; त्रिज्या : QA, QB ; चाप : $\overset{\frown}{EAC}$, $\overset{\frown}{ACF}$ इत्यादि।

   अर्धवृत्त : ACFDB, AEB ; अर्धवृत्ताकार क्षेत्र : AEBQA ; ACFDBQA

   (d) केन्द्र : R ; त्रिज्या : RF, RG, RD, RC ; व्यास : CD ; जीवा : CE, DE ; चाप : $\overset{\frown}{BDA}$ इत्यादि

   अर्धवृत्त : CFGBD, DAEC ; अर्धवृत्ताकार क्षेत्र : CFGBDRC, CEADRC

2. (a) 2.5 सेमी (b) 8 सेमी (c) 14.4 सेमी

आइए अभ्यास करें

1. (a) केवल एक (b) सबसे लंबी (c) दुगुना (d) जीवा

   (e) व्यास (f) समकोण

2. (a) 9 सेमी (b) 10.5 सेमी (c) 12 सेमी

4. PQ

15

सर्वांगसम तथा सममित आकृतियाँ

अपने दैनिक जीवन में, हमें ऐसी अनेक वस्तुएं मिलती हैं, जिनके आकार और माप समान होते हैं। जैसे-एक ही कंपनी के ब्लेड, एक ही ब्रांड के बिस्कुट आदि। ऐसी वस्तुएं सर्वांगसम (Congruent) कहलाती हैं। हमें कुछ ऐसी भी आकृतियां मिलती हैं, जैसे चित्र 15.1 में दी हैं।

(i) ताजमहल का चित्र

(ii) तितली का चित्र

चित्र 15.1

इनको हम एक ऐसी रेखा के अनुदिश मोड़ सकते हैं, ताकि आकृति का एक भाग, शेष भाग को पूरा-पूरा ढक लेता है। ऐसी आकृतियां **सममित आकृतियां (Symmetric figures)** कहलाती हैं।

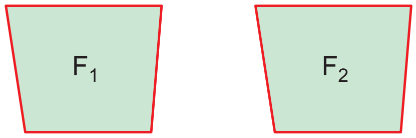
इस पाठ से हम सीखेंगे :

- सर्वांगसम आकृतियों के बारे में
- त्रिभुज की सर्वांगसमता के SSS, SAS, ASA और RHS नियमों या प्रतिबंधों के बारे में
- सममित आकृतियों, विशेष रूप से रेखा (या रैखिक) सममिति वाली आकृतियों के बारे में
- सममित आकृतियों की सममित अक्षों के बारे में

15.1 सर्वांगसमता

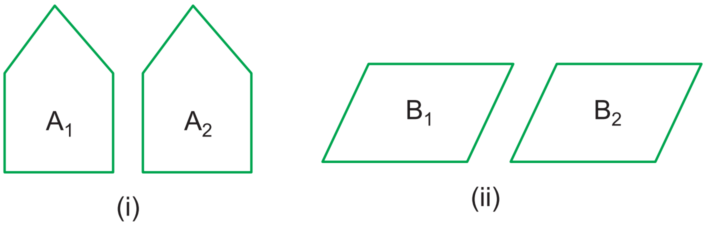
चित्र 15.2 में दी हुई आकृतियों F_1 और F_2 को देखिए, इनमें से F_1 को काटकर निकाल लीजिए तथा F_2 पर रखने का प्रयास कीजिए। आप पाएंगे कि आकृति F_1 आकृति F_2 को

पूरा–पूरा ढक लेती है। अर्थात् इन दोनों आकृतियों के आकार और माप समान हैं। दूसरे शब्दों, आकृतियां F_1 और F_2 सर्वांगसम हैं।



चित्र 15.2

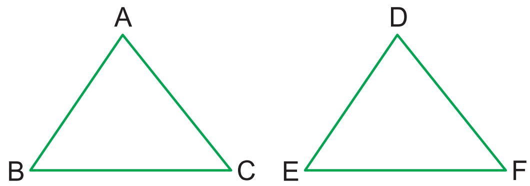
सर्वांगसमता जांच करने की यह विधि **अध्यारोपण (Super-position)** विधि कहलाती है। अध्यारोपण द्वारा, आप जांच कर सकते हैं कि चित्र 15.3 में (i) में दी आकृतियां सर्वांगसम नहीं हैं, परंतु (ii) में दी आकृतियां सर्वांगसम हैं। सर्वांगसमता दर्शाने के लिए चिन्ह ($\cong$) का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार $F_1 \cong F_2$ और $B_1 \cong B_2$ है।



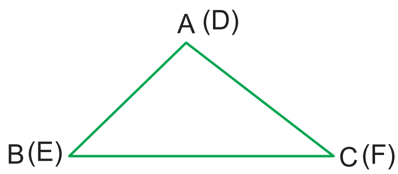
चित्र 15.3

15.2 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

चित्र 15.4 में दिए दोनों त्रिभुजों ABC और DEF पर विचार कीजिए। त्रिभुज DEF को काटकर निकाल लीजिए और इसे त्रिभुज ABC पर रखने का प्रयास कीजिए। आप देखेंगे कि त्रिभुज DEF त्रिभुज ABC को तब पूरा–पूरा ढक लेता है, जब शीर्ष D शीर्ष A पर पड़ता है, शीर्ष E शीर्ष B पर पड़ता है तथा शीर्ष F शीर्ष C पर पड़ता है (चित्र 15.5) हम कहते हैं कि संगतता $ABC \leftrightarrow DEF$ के साथ त्रिभुज ABC त्रिभुज DEF के सर्वांगसम है। इसे सांकेतिक रूप में $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ लिखते हैं। इसे $\Delta ABC \cong \Delta EDF$ या $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ लिखना सही नहीं होगा। चित्र 15.5 से आप देख सकते हैं कि $AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ है।



चित्र 15.4



चित्र 15.5

संगतता $ABC \leftrightarrow DEF$ में, AB और DE दोनों त्रिभुजों की **संगत भुजाएं** कहलाती हैं। इसी प्रकार, BC और EF संगत भुजाएं हैं $\angle B$ और $\angle E$ संगत कोण हैं, इत्यादि। अर्थात् दोनों सर्वांगसम त्रिभुजों ABC और DEF के सभी संगत छः **अवयव (या अंग)** परस्पर बराबर हैं।

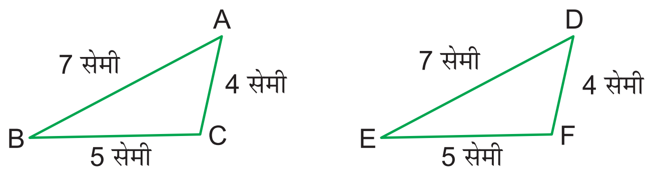
15.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के नियम या प्रतिबंध

दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की जांच करने के लिए, यह आवश्यक नहीं है कि हम सदैव उनके छः अवयवों (तीन कोण और तीन भुजाओं) या भागों की समानता की जांच करें। दो त्रिभुजों की

टिप्पणी

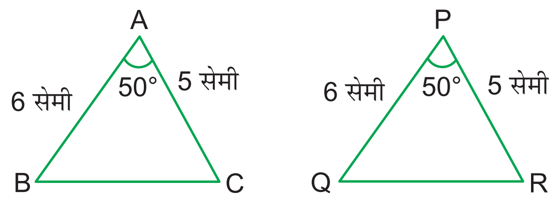
सर्वांगसमता के लिए, हम निम्नलिखित नियमों द्वारा उनकी सर्वांगसमता की जांच कर सकते हैं, जिनमें उनके केवल तीन संगत भागों की आवश्यकता होती है:

(i) भुजा-भुजा-भुजा (SSS) सर्वांगसमता नियम : दो त्रिभुजों ABC और DEF की रचना इस प्रकार कीजिए कि AB = DE = 7 सेमी, BC = EF = 5 सेमी और CA = FD = 4 सेमी हो (चित्र 15.6)। इन दोनों त्रिभुजों में, एक त्रिभुज की तीनों भुजाएं दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हैं। अब ΔDEF को काटकर ΔABC पर रखने का प्रयास कीजिए। आप देखेंगे कि संगतता $ABC \leftrightarrow DEF$ के त्रिभुज DEF त्रिभुज ABC को पूर्णतया ढक लेता है। अत: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है। यदि हम ऐसे अन्य त्रिभुजों के युग्म खींचें तो भी हमें यही परिणाम प्राप्त होता है। अत:, **यदि किन्हीं दो त्रिभुजों में, एक त्रिभुज की तीनों भुजाएं दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं**। इसे त्रिभुजों का **भुजा-भुजा-भुजा (SSS) सर्वांगसमता नियम या प्रतिबंध** कहते हैं।



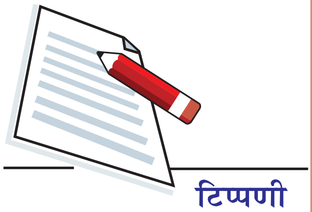
चित्र 15.6

(ii) भुजा-कोण-भुजा (SAS) सर्वांगसमता नियम : दो त्रिभुजों ABC और PQR की रचना इस प्रकार कीजिए कि AB = PQ = 6 सेमी, $\angle A = \angle P = 50°$ और AC = PR = 5 सेमी है (चित्र 15.7)। यहां एक त्रिभुज की दो भुजाएं और उनके अंतर्गत कोण क्रमश: दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हैं। अब ΔPQR को काटकर ΔABC पर रखने का प्रयास कीजिए। आप देखेंगे कि संगतता $ABC \leftrightarrow PQR$ के अंतर्गत त्रिभुज PQR त्रिभुज ABC को पूर्णतया ढक लेता है। अत: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है। ऐसे अन्य त्रिभुजों को खींचने पर भी हमें यही परिणाम प्राप्त होगा। अत: **यदि किन्हीं दो त्रिभुजों में, एक त्रिभुज की दो भुजाएं और उनके अंतर्गत कोण क्रमश: दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं**। इसे त्रिभुजों का **भुजा-कोण-भुजा (SAS) सर्वांगसमता नियम या प्रतिबंध** कहते हैं।



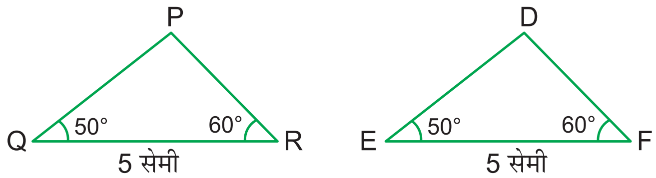
चित्र 15.7

(iii) कोण-भुजा-कोण (ASA) सर्वांगसमता नियम : दो त्रिभुजों PQR और DEF की रचना इस प्रकार कीजिए कि QR = EF = 5 सेमी, $\angle Q = \angle E = 50°$ तथा $\angle R = \angle F = 60°$ हो (चित्र 15.8)। यहां एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा क्रमश: दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हैं। अब ΔDEF को काटकर



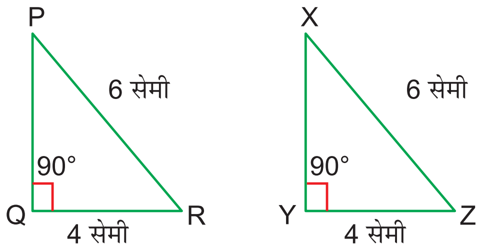
टिप्पणी

ΔPQR पर परखने का प्रयास कीजिए। आप देखेंगे कि संगतता $PQR \leftrightarrow DEF$ के अंतर्गत त्रिभुज DEF त्रिभुज PQR को पूर्णतया ढक लेता है। अतः $\Delta PQR \cong \Delta DEF$ है। ऐसे अन्य त्रिभुजों के युग्मों को खींचने पर भी हमें यही परिणाम प्राप्त होगा। अतः **यदि किन्हीं दो त्रिभुजों में, एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे त्रिभुजों का कोण-भुजा-कोण (ASA) सर्वांगसमता नियम या प्रतिबंध कहते हैं।**



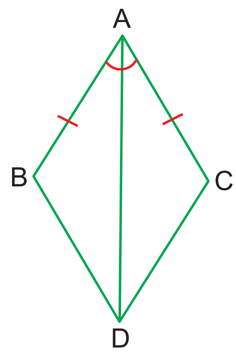
चित्र 15.8

(iv) समकोण-कर्ण-भुजा (RHS) सर्वांगसमता नियम : दो समकोण त्रिभुजों PQR और XYZ की इस प्रकार रचना कीजिए कि $\angle Q = \angle Y = 90°$, कर्ण PR = कर्ण XZ = 6 सेमी और भुजा QR = भुजा YZ = 4 सेमी हो (चित्र 15.9)। यहां एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हैं। अब ΔXYZ को काटकर ΔPQR पर रखने का प्रयास कीजिए। आप देखेंगे कि संगतता $PQR \leftrightarrow XYZ$ के अंतर्गत त्रिभुज XYZ त्रिभुज PQR को पूर्णतया ढक लेता है। अतः $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ है। ऐसे अन्य समकोण त्रिभुजों के युग्मों को खींचने पर भी आप इसी परिणाम पर पहुचेंगे। अतः यदि **किन्हीं दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों तो दोनों समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे त्रिभुजों का समकोण-कर्ण-भुजा (RHS) सर्वांगसमता नियम या प्रतिबंध** कहते हैं।



चित्र 15.9

उदाहरण 15.1 : चित्र 15.10 में, AB = AC और $\angle BAD = \angle CAD$ है। क्या $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ है? यदि हां तो किस नियम द्वारा और क्यों?

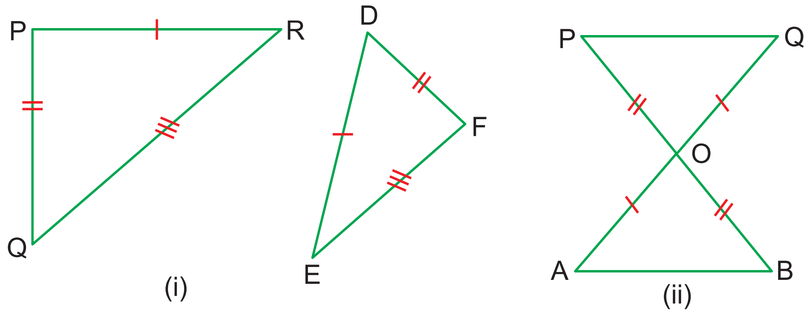


चित्र 15.10

हल : हां, क्योंकि ΔABC और ΔACD में, AB = AC (दिया है), $\angle BAD = \angle CAD$ (दिया है) तथा AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः SAS नियम द्वारा $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ है।

उदाहरण 15.2 : चित्र 15.11 को देखिए, जिसमें त्रिभुजों के युग्मों के बराबर भाग समान चिन्हों से दर्शाए गए हैं। बताइए कि किस नियम द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम हैं। साथ ही, इन्हें सांकेतिक रूप में भी लिखिए।



चित्र 15.11

हल : (i) में, $PR = DE$, $PQ = DF$ तथा $QR = EF$ है। अत: संगतता $PQR \leftrightarrow DFE$ है।
अत: SSS सर्वांगसमता नियम द्वारा $\Delta PQR \cong \Delta DFE$ है।

(ii) में, $AO = QO$, $BO = PO$ तथा $\angle AOB = \angle QOP$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अत:, SAS सर्वांगसमता नियम द्वारा $\Delta AOB \cong \Delta QOP$ है।

देखें आपने कितना सीखा 15.1

1. रिक्त स्थानों को भरिए:

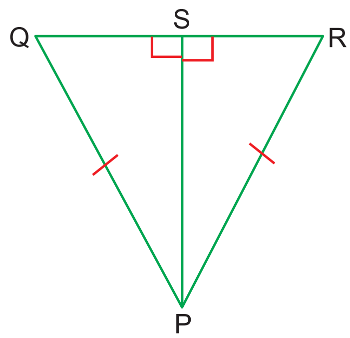
   $\Delta ABC \cong \Delta QPR$ में,

   (i) AB = ... (ii) BC = ...

   (iii) $\angle C$ = ... है।

2. चित्र 15.12 में, $PQ = PR$ और $PS \perp QR$ है। क्या $\Delta PSQ \cong \Delta PSR$ है?

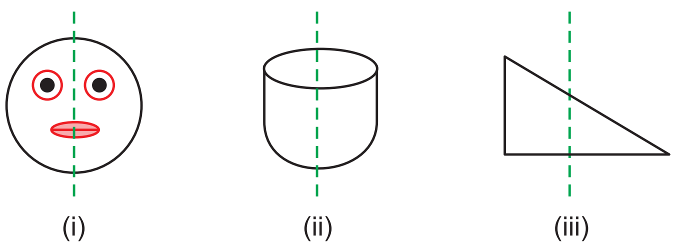
   यदि हां, तो किस नियम द्वारा?



चित्र 15.12

15.4 सममिति (Symmetry)

चित्र 15.13 में दी हुई आकृतियों को देखिए।



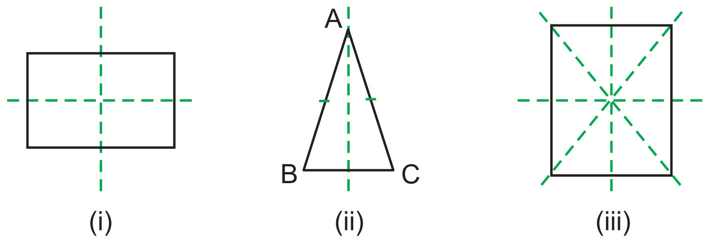
चित्र 15.13

आकृति (i) को यदि आप बिन्दुकित रेखा के अनुदिश मोड़ें तो आकृति का एक भाग दूसरे भाग को पूर्णतया ढक लेता है। अत: आकृति (i) बिन्दुकित रेखा के सापेक्ष सममित है।

बिन्दुकित रेखा इसकी सममित अक्ष या सममित रेखा है। इसी प्रकार, आकृति (ii) भी बिन्दुकित रेखा के सापेक्ष सममित है, परंतु आकृति (iii) सममित नहीं है, क्योंकि हम कोई ऐसा रेखा नहीं प्राप्त कर सकते, जिसके अनुदिश आकृति को मोड़ने पर एक भाग दूसरे भाग को पूर्णतया ढक ले। ऐसी आकृति **असममित आकृति** कहलाती हैं।

15.5 सममित अक्ष या रेखाओं की संख्या

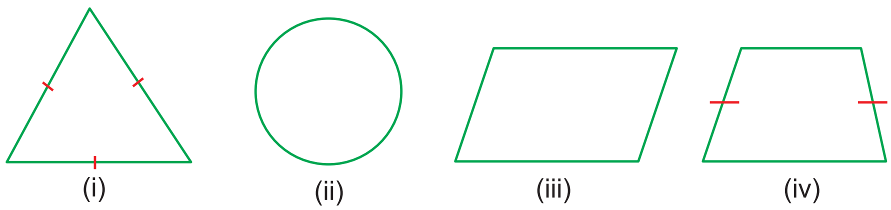
विभिन्न आकृतियों में, सममित अक्षों या सममित रेखाओं की संख्या भिन्न-भिन्न हो सकती हैं (चित्र 15.14)।



चित्र 15.14

आकृति (i) एक आयत है। इसकी दो सममित अक्ष हैं। आकृति (ii) एक समद्विबाहु त्रिभुज है। इसकी केवल एक सममित अक्ष है। आकृति (iii) एक वर्ग है। इसकी चार सममित अक्ष हैं।

उदाहरण 15.3 : चित्र 15.15 को देखिए।



चित्र 15.15

(a) चित्र में, कौन-कौन सी आकृतियां सममित हैं तथा कौन-कौन सी असममित हैं?

(b) सममित आकृतियों में, सममित अक्षों की संख्याएं क्या हैं?

हल : सममित : (i), (ii) और (iv)

असममित : (iii)

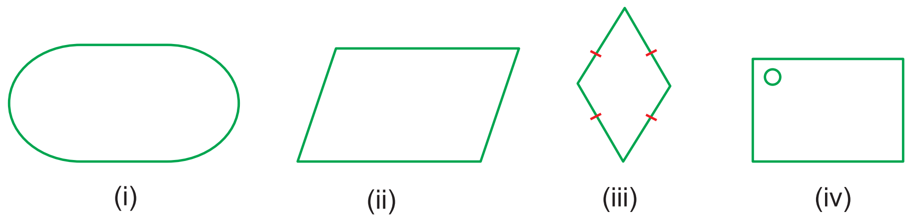
(i) एक समबाहु त्रिभुज है, इसमें सममित अक्षों की संख्या तीन है।

(ii) एक वृत्त है। इसमें प्रत्येक व्यास सममित अक्ष है। अत: सममित अक्षों की संख्या, असंख्या या अपरिमित है।

(iv) एक समद्विबाहु समलंब है। इसकी केवल सममित अक्ष है।

देखें आपने कितना सीखा 15.2

1. चित्र 15.16 में, सममित तथा असममित आकृतियों की पहचान कीजिए। सममित आकृतियों की सममित अक्षों की संख्याएं भी लिखिए।



चित्र 15.16

आइए दोहराएं

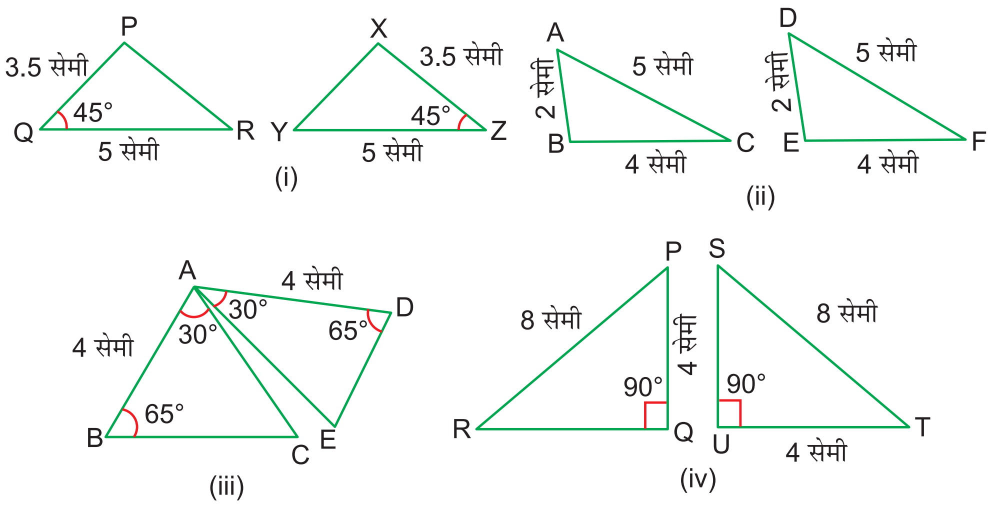
- समान आकार और समान माप वाली आकृतियां सर्वांगसम आकृतियां कहलाती हैं। सर्वांगसमता के लिए, '≅' चिन्ह का प्रयोग किया जाता है।
- दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की जांच निम्न नियमों द्वारा की जा सकती है:

  (i) SSS सर्वांगसमता नियम (ii) SAS सर्वांगसमता नियम

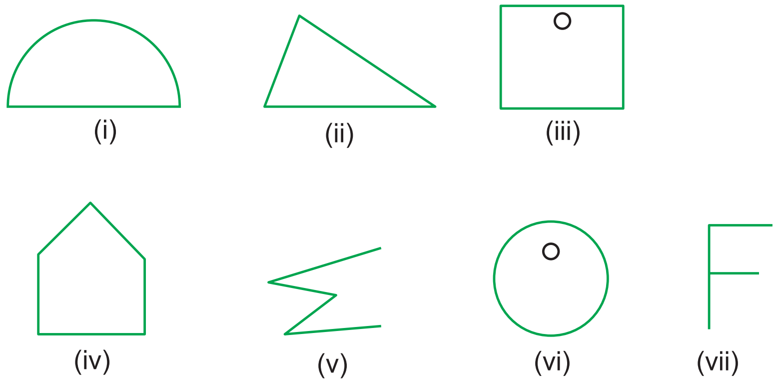
  (iii) ASA सर्वांगसमता नियम (iv) RHS सर्वांगसमता नियम
- यदि किसी आकृति के लिए एक रेखा ऐसी प्राप्त हो जाए कि उसके अनुदिश आकृति को मोड़ने पर उसका एक भाग दूसरे भाग को पूर्णतया ढक ले तो वह आकृति उस रेखा के सापेक्ष सममित आकृति कहलाती है, अन्यथा वह असममित आकृति कहलाती है। वह रेखा आकृति की सममित अक्ष या सममित रेखा कहलाती है।
- विभिन्न आकृतियों में सममित अक्षों की संख्याएं भिन्न-भिन्न होती हैं।

आइए अभ्यास करें

1. चित्र में, सर्वांगसम त्रिभुजों को पहचानिए तथा सर्वांगसमता नियम बताते हुए, उन्हें सांकेतिक रूप में लिखिए:



2. नीचे दिए चित्र में, सममित और असममित आकृतियों की पहचान कीजिए। सममित आकृतियों की सममित अक्षों की संख्याएं भी बताइए।



उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 15.1

1. (i) QP (ii) PR (iii) LR

2. हां, RHS द्वारा

देखें आपने कितना सीखा 15.2

1. **सममित :** (i), (ii), (iii)

   असममित : (iv)

   सममित अक्षों की संख्या : (i) में दो, (ii) में दो, (iii) में एक

आइए अभ्यास करें

1. (i) सर्वांगसम, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (SAS) (ii) नहीं

   (iii) सर्वांगसम $\Delta ABC \cong \Delta ADE$ (ASA) (iv) सर्वांगसम, $\Delta PQR \cong \Delta TUS$ (RHS)

2. **सममित :** (i), (iii), (iv), (v) और (vi)

   असममित : (ii) और (vii)

   सममित अक्षों की संख्या : (i) में एक, (iii) में एक, (iv) में पांच, (v) में एक और (vi) में एक।

मॉड्यूल V
क्षेत्रमिति एवं सांख्यिकी

क्षेत्रमिति

आप बंद समतल आकृतियों, जैसे-त्रिभुजों, आयतों, वर्गों, चतुर्भुजों, वृत्तों इत्याति से परिचित हैं। आप ठोसों घनाभ तथा घन इत्यादि से भी परिचित हैं। समतल आकृतियों के परिमाप तथ क्षेत्रफल निकालने के तरीके तथा ठोस आकृतियों के पृष्ठ क्षेत्रफल तथा आयतन (घनफल) निकालने के तरीकों का अध्ययन 'क्षेत्रमिति' के अंतर्गत आता है।

क्षेत्रमिति के ज्ञान तथा तरीकों के विषय में जानकारी आम व्यक्तियों, विशेषतया सर्वेयरों, आर्किटैक्टों, इंजीनियरों, कारीगरों इत्यादि के लिए अति लाभदायक है।

हमारे दैनिक जीवन में ऐसी कई स्थितियां आती हैं, जब हमें निम्न ज्ञात करना पड़ता है:

1. कमरे की चारों दीवारों की सफेदी करवाने के लिए उसका क्षेत्रफल
2. पलास्टर कराने के लिए छत का क्षेत्रफल
3. बाड़ लगाने के लिए कटीली तार की लंबाई
4. फर्श पर लगाने के लिए टाइलों की संख्या
5. विभिन्न प्रकार के बर्तनों की धारिता (Capacity)

यह कुछ ऐसी स्थितियां हैं, जहां क्षेत्रमिति का अनुप्रयोग दैनिक जीवन में आता है। यह मॉड्यूल शिक्षार्थियों को इस प्रकार के तरीकों (Skills) को सिखाने में सहायता करेगा।

इस मॉड्यूल में आप सीखेंगे कि किस प्रकार-

- समतल आकृतियों, जैसे-त्रिभुजों, आयतों, वर्गों, समांतर चतुर्भुजों इत्यादि का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात किया जाता है।
- घनाभ तथा घन इत्यादि ठोसों के पृष्ठों, शीर्षों तथा भुजाओं की संख्या ज्ञात की जा सकती है।
- घनाभ तथा घन इत्यादि ठोसों का पृष्ठ क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात किया जाता है।

सांख्यिकी

आधुनिक समाज में सांख्यिकी की अहम् भूमिका है। यदि आपने, किसी देश की जनता के साक्षरता स्तर, किसी प्रदेश की वर्ष भर में अनाज की आवश्यकता अथवा किसी जनसमूह की प्रति व्यक्ति आय का अध्ययन करना हो तो आपको सांख्यिकी विषय के प्रयोग की आवश्यकता होगी। गणित की इस शाखा का मूल उस समय से है, जब समाज को नियमित करने के लिए सरकारी तंत्र का प्रारंभ हुआ। सरकार को किसी देश के उन सभी लेखों को रखने की आवश्यकता होगी, जिन्हें किसी देश की विकास, विशेष रूप से आर्थिक विकास की योजना बनाने के लिए प्रयोग में लाना पड़ता है।

इस मॉड्यूल में आपका परिचय, सांख्यिकी के मौलिक तत्वों जैसे–आंकड़ों, प्राथमिक और द्वितीय आंकड़ों, उनका प्रदर्शन और उनसे निष्कर्ष निकालने से करवाया जाएगा।

आप, यथाप्राप्त आंकड़े इकट्ठे करना, इनका वर्गीकरण करना, इन्हें दंडारेख और बारंबारता सारणी के रूप में निरूपित करना सीखेंगे।

16

समतल आकृतियों का क्षेत्रफल

दैनिक जीवन में हमें निम्नलिखित प्रकार के प्रश्नों के विषय में जूझना पड़ता है:

(i) प्लाटों का क्षेत्रफल ज्ञात करना

(ii) एक कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात करना

(iii) आयातकार अथवा वृत्ताकार पार्कों की बाउंड्री की लंबाई ज्ञात करना

(iv) त्रिभुजाकार, आयताकार, समांतर चतुर्भुजाकार वस्तुओं का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात करना।

यह सब, एक-दूसरे से इसलिए संबंधित है कि हम किस प्रकार आयताकार, त्रिभुजाकार तथा वृत्ताकार का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- समतल क्षेत्रों के परिमाप तथा क्षेत्रफलों की परिकल्पना के विषय में
- क्षेत्रफल के मापन में मानक मात्रक
- समतल आकृतियों के परिमाप तथा क्षेत्रफलों को ज्ञात करने के तरीके ज्ञात करना, जैसे–
  - त्रिभुज
  - आयत
  - वर्ग
  - समांतर चतुर्भुज
- वृत्त के परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात करने के तरीके ज्ञात करना।

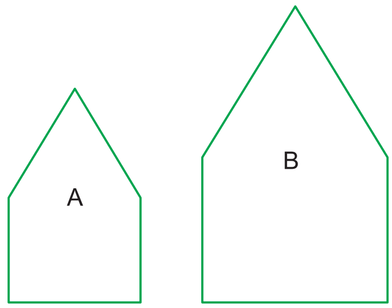
हम उपरोक्त का दैनिक जीवन में अनुप्रयोग भी सीखेंगे।

16.1 क्षेत्रफल

चित्र 16.1 में दी गई आकृतियों को देखिए–

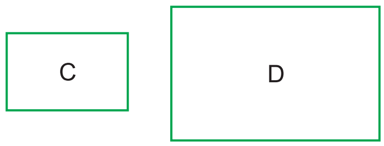
इनमें से कौन-सी आकृति बड़ी है?

हम यह देखकर ही कह सकते हैं कि आकृति B, आकृति A से बड़ी है, क्योंकि आकृति B द्वारा तल का घिरा क्षेत्र आकृति A द्वारा घिरे क्षेत्र से बड़ा है।



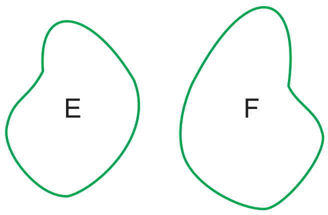
चित्र 16.1

इसी प्रकार चित्र 16.2 में आकृतियों C तथा D में से हम कह सकते हैं कि आकृति D, आकृति C से बड़ी है, क्योंकि यह आकृति C की तुलना में तल का अधिक क्षेत्र घेरती है।



चित्र 16.2

चित्र 16.3 में अनियमित आकृतियों E तथा F को देखें। यह कहना कि इनमें से कौन-सी आकृति बड़ी है, जरा कठिन है। इसका उत्तर निम्नलिखित प्रश्न के उत्तर में निहित है:



चित्र 16.3

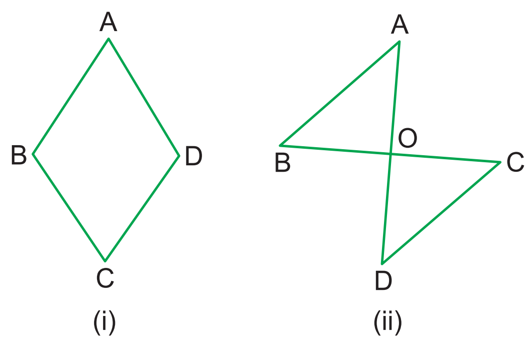
इनमें से कौन-सी आकृति तल का अधिक भाग घेरती है। क्या अब हम कह सकते हैं कि बंद समतल आकृति द्वारा तल के घिरे क्षेत्र का माप उसका क्षेत्रफल है।

16.2 एक समतल क्षेत्र का क्षेत्रफल

याद कीजिए कि समतल आकृतियां, जैसे-त्रिभुज, आयत, वर्ग इत्यादि को रेखीय (Rectilinear) आकृतियां कहा जाता है, क्योंकि वह रेखाखंडों से बनी होती हैं।

एक रेखीय आकृति को सरल कहा जाता है, जबकि उसकी कोई दो भुजाएं साझे अंतिम बिंदुओं के सिवाए और कहीं न मिलती हों। उदाहरण के तौर पर चित्र 16.4 में (i) सरल रेखीय आकृति है, जबकि (ii) नहीं है।

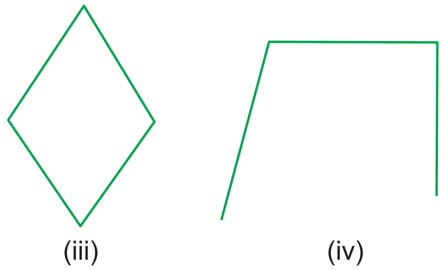
यदि किसी आकृति की सीमा (बाउंड्री) पर स्थित किसी भी बिंदु से चलना शुरू करके उसकी सीमा के साथ-साथ चलते हुए वापस उसी बिंदु पर पहुंच जाते हैं तो उस आकृति को बंद आकृति कहते हैं।



चित्र 16.4

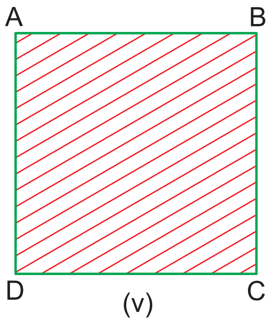
चित्र 16.5 में (iii) एक बंद रेखीय आकृति है, जबकि (iv) नहीं है।

एक आयत ABCD एक कागज पर बनाइए तथा उसके द्वारा घिरे क्षेत्र को छायांकित कीजिए। छायांकित क्षेत्र को आयताकार क्षेत्र कहा जाता है (देखिए चित्र 16.6)।

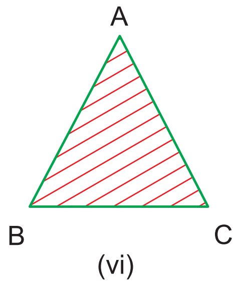


चित्र 16.5

इसी प्रकार, एक त्रिभुज ABC कागज के टुकड़े पर बनाइए तथा उसके द्वारा घिरे क्षेत्र को छायांकित कीजिए। छायांकित क्षेत्र (vi) को त्रिभुजाकार क्षेत्र कहा जाता हैं (देखिए चित्र 16.7)



चित्र 16.6



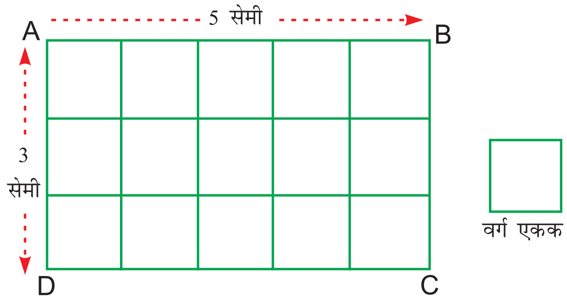
चित्र 16.7

इसलिए हम कह सकते हैं कि

एक साधारण बंद आकृति द्वारा घिरे तल के क्षेत्र को आकृति का क्षेत्र कहते हैं तथा तल के उस घिरे क्षेत्र की माप उस आकृति का क्षेत्रफल कहलाता है।

16.3 क्षेत्रफल को मापने के मानक मात्रक

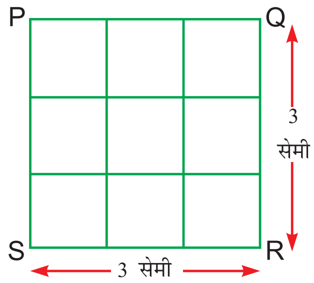
स्मरण कीजिए कि किसी रेखाखंड का माप रेखीय मात्रकों, जैसे-मीटर, सेमी, मि.मी. इत्यादि में किया जाता है। इसी प्रकार किसी समतल क्षेत्र का क्षेत्रफल मात्रक वर्ग के रूप में किया जाता है। यह मात्रक वर्ग 1 मी. भुजा, 1 सेमी भुजा अथवा 1 मि.मी. भुजा वाला हो सकता है।



चित्र 16.8

टिप्पणी

एक आयत लीजिए, जिसकी लंबाई 5 सेमी तथा चौड़ाई 3 सेमी है। हम AB को पांच समान भागों में बांटें (प्रत्येक भाग 1 सेमी लंबाई का हो)। इसी प्रकार AD को हम तीन समान भागों में बांटें, जिसमें से प्रत्येक 1 सेमी लंबा है। इन बिंदुओं को यदि हम मिलाएं तो हमें 15 वर्ग मिलते हैं, जिसमें से प्रत्येक की भुजा 1 सेमी है। अत: वर्ग एकक द्वारा घिरे तल के क्षेत्र की तुलना में आकृति ABCD, 15 गुना तल का क्षेत्र घेरती है। अत: यदि हम एक वर्ग एकक का क्षेत्रफल 1 सेमी^{2} लें तो आयताकार क्षेत्र ABCD का क्षेत्रफल 15 सेमी^{2} है। इसी प्रकार वर्ग PQRS का क्षेत्रफल 9 सेमी^{2} है (चित्र 16.9 देखिए)।

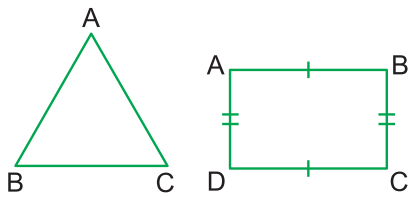


चित्र 16.9

इस प्रकार यदि एकक वर्ग की भुजा 1 मी. अथवा 1 कि.मी. है तो वह 1 मी.^{2} अथवा 1 कि.मी.^{2} क्षेत्र घेरेगा।

16.4 रेखीय आकृतियों का परिमाप

किसी आकृति से घिरे क्षेत्र की सीमाओं के साथ-साथ एक पूरा चक्कर लगाने में तय की गई दूरी को उस आकृति का परिमाप कहते हैं। इस प्रकार त्रिभुज ABC का परिमाप (AB+BC+CA) तथा आयत ABCD का परिमाप 2(AB+BC) है (चित्र 16.10 देखिए)।



चित्र 16.10

क्योंकि परिमाप एक रैखिक माप है, इसलिए इसके माप के एकक (इकाई) सेमी, मी. अथवा कि.मी. आदि हो सकते हैं।

उदाहरण 16.1: एक त्रिभुज ABC का परिमाप ज्ञात कीजिए, जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 5 सेमी तथा CA = 3 सेमी है।

हल: ABC का परिमाप = (AB + BC + CA)

= (5 + 7 + 3) सेमी

= 15 सेमी

उदाहरण 16.2: एक समबाहु त्रिभुज, जिसकी भुजा 5 सेमी है, का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल: एक समबाहु त्रिभुज की सभी भुजाएं समान होती हैं।

अतः समबाहु त्रिभुज का परिमाप $=$ (भुजा $+$ भुजा $+$ भुजा) या $3 \times$ भुजा

$= 3 \times 5$ सेमी

$= 15$ सेमी

उदाहरण 16.3: एक समद्विबाहु त्रिभुज का आधार BC, 6 सेमी तथा समान भुजाओं में से एक भुजा AB, 5 सेमी है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

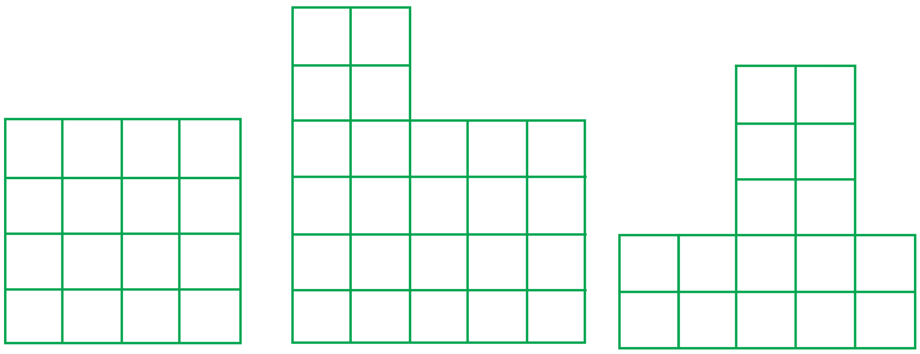
हल : समद्विबाहु त्रिभुज ABC का परिमाप $= (BC + 2 \times AB)$ $\quad [AB = AC]$

$= (6 + 2 \times 5)$ सेमी

$= 16$ सेमी

देखें आपने कितना सीखा 16.1

1. चित्र 16.11 की आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जबकि प्रत्येक वर्ग 1 वर्ग सेमी क्षेत्रफल का है।



(i) (ii) (iii)

चित्र 16.11

2. रिक्त स्थानों को भरिए:-

   (i) तल का वह भाग, जो एक सरल बंद आकृति द्वारा घिरा हो, उसका .... कहलाता है।

   (ii) तल के उस क्षेत्र की .... जो एक आकृति द्वारा घिरा हो उस क्षेत्र का क्षेत्रफल कहलाता है।

   (iii) .... क्षेत्रफल का एक मानक एकक है।

   (iv) किसी बंद आकृति के चहुं ओर जाने में तय की गई की .... को उसका परिमाप कहते हैं।

   (v) एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप .... है।

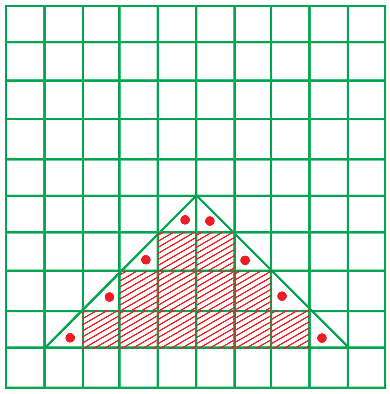
टिप्पणी

3. एक त्रिभुज, जिसकी भुजाएं 3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी हैं, का परिमाप ज्ञात कीजिए।

4. एक समबाहु त्रिभुज, जिसकी भुजा 8 सेमी है, का परिमाप ज्ञात कीजिए।

16.5 आलेख की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल

चित्र 16.12 में एक त्रिभुज ABC एक सेमी ग्राफ पेपर पर बनाई गई है। हम त्रिभुजाकार क्षेत्र में पूर्ण वर्ग तथा अपूर्ण वर्ग गिनें।



चित्र 16.12

पूर्ण वर्गों की संख्या (रेखांकित) = 12

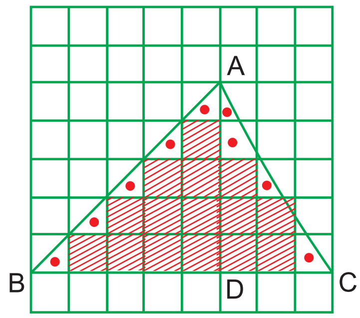
अपूर्ण वर्गों की संख्या = 8

क्योंकि प्रत्येक अपूर्ण वर्ग आधा वर्ग है

अतः ABC का क्षेत्रफल = $(12 + \frac{1}{2} \times 8)$सेमी^{2}

= 16 सेमी^{2}

चित्र 16.13 में बनी त्रिभुज में



चित्र 16.13

पूर्ण वर्गों की संख्या = 14

अपूर्ण वर्गों की संख्या, जो

आधे वर्ग हैं = 5

आधे वर्ग से बड़े हैं = 3

आधे वर्ग से छोटे हैं = 3

हम निम्नलिखित नियम का पालन करेंगे:

(a) अपूर्ण वर्ग, जो आधे से बड़े हैं, उन्हें पूरा वर्ग मानेंगे

(b) अपूर्ण वर्ग, जो आधे से छोटे हैं, छोड़ दिए जाएंगे

अतः ABC का क्षेत्रफल = $(14 + \frac{1}{2} \times 5 + 3 \times 1 + 3 \times 0)$ सेमी^{2}

= (14 + 2.5 + 3) अथवा 19.5 सेमी^{2}

इस कारण आलेख द्वारा ज्ञात किया क्षेत्रफल लगभग माना जाता है (केवल उन्हीं प्रश्नों में, जहां केवल आधे वर्ग तथा पूरे वर्ग आते हों (चित्र 16.12), वहीं क्षेत्रफल सदा एक जैसा मिलेगा, अन्यथा नहीं)

टिप्पणी

16.6 सूत्र की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल

चित्र 16.12 को फिर से देखें। हम देखते हैं कि

(i) त्रिभुज के आधार की लंबाई 8 सेमी है (यह लंबाई में 8 वर्गों की लंबाई जितनी है)

(ii) त्रिभुज की ऊंचाई 4 सेमी है ($AD = 4$ सेमी)

(i) तथा (ii) का गुणनफल क्या है। यह (8×4) अथवा 32 सेमी^{2} है

आप देखेंगे कि यह त्रिभुज के ज्ञात किए गए क्षेत्रफल का दुगुना है।

अत: $2 \times ABC$ का क्षेत्रफल = 32 सेमी^{2}

अत: ABC का क्षेत्रफल = 16 सेमी^{2} = $\frac{1}{2}(BC \times AD)$

अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$(आधार) $\times$ (संगत ऊंचाई)

आइए अब चित्र 16.13 में बनी आकृति को देखिए:

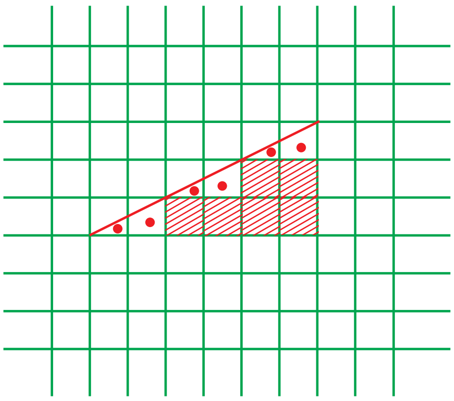
(i) आधार BC की लंबाई = 8 सेमी

(ii) ऊंचाई AD = 5 सेमी

2(ΔABC का क्षेत्रफल) = (8×5) सेमी^{2}

ΔABC का क्षेत्रफल = 20 सेमी^{2}

$$= \frac{1}{2} BC \times AD$$



चित्र 16.14

क्या हम ऊपर के दो उदाहरणों से कह सकते हैं कि

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार) $\times$ (संगत ऊंचाई)

हीरो के सूत्र के प्रयोग से त्रिभुज का क्षेत्रफल

एक त्रिभुज ABC जिसकी भुजाओं के माप a, b, c हैं, का क्षेत्रफल (Δ)

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

जिसमें $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

टिप्पणी

इस सूत्र को ग्रीक के गणितज्ञ हीरोन आफ एलेक्सेड्रिया के नाम पर हीरो सूत्र के नाम से जाना जाता है। यह सूत्र भारतीय गणितज्ञों ब्रह्म गुप्ता एवं आर्य भट्ट ने भी ज्ञात किया था।

आइए, इस सूत्र की सहायता से एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं, जिसकी भुजाएं 25 सेमी, 60 सेमी एवं 65 सेमी हैं।

मान लीजिए, a = 25 से.मी, b = 60 सेमी, c = 65 सेमी

$$\therefore \quad s = \frac{25+60+65}{2} = 75 \text{ सेमी}$$

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{75(75-25)(75-60)(75-65)}$

$= \sqrt{75 \times 50 \times 15 \times 10}$

$= \sqrt{3 \times 5 \times 5 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 5 \times 2 \times 5}$

$= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$

$= 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 750$ सेमी^{2}

उदाहरण 16.4 : चित्र 16.14 में दी गई त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : चित्र 16.14 से हम पाते हैं कि

पूर्ण वर्गों की संख्या = 6

अपूर्ण वर्गों की संख्या, जो

(a) आधे से बड़े हैं : 3

(b) आधे से छोटे हैं : 3

अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल = $(6 + 3 \times 1 + 3 \times 0)$ सेमी^{2}

= 9 सेमी^{2}

उदाहरण 16.5 : उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार 9 सेमी तथा ऊँचाई 6 सेमी है।

हल : त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ संगत ऊंचाई

$= (\frac{1}{2} \times 9 \times 6)$ सेमी^{2}

= 27 सेमी^{2}

उदाहरण 16.6 : एक त्रिभुज PQR का आधार ज्ञात कीजिए, जबकि उसका क्षेत्रफल 30 सेमी^{2} तथा ऊंचाई 6 सेमी है।

हल : माना ΔPQR का आधार x सेमी है

अतः $\frac{1}{2} \times x \times 6 = 30$

अथवा $x = 10$

अर्थात् ΔPQR के आधार की लंबाई 10 सेमी है।

उदाहरण 16.7: एक ऐसे ΔABC की ऊंचाई AD ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 112 सेमी^{2} तथा आधार BC, 32 सेमी है।

हल : माना ΔABC की ऊंचाई AD, x है

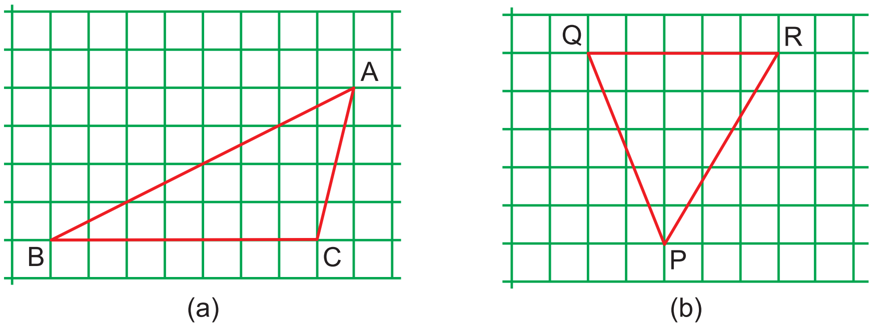
अतः $\frac{1}{2}(32 \times x) = 112$

अथवा $x = 7$

अर्थात्, त्रिभुज ABC की ऊंचाई AD = 7 सेमी

देखें आपने कितना सीखा 16.2

1. चित्र 16.15 में दिखाई गई त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:



चित्र 16.15

2. दिए गए निम्नलिखित आंकड़ों से ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

	आधार	ऊंचाई
(i)	8 सेमी	4 सेमी
(ii)	16 सेमी	2 सेमी
(iii)	9 सेमी	7 सेमी

3. त्रिभुज के लिए निम्नलिखित रिक्त स्थानों को भरिए:

	क्षेत्रफल	आधार	ऊंचाई
(i)	30 सेमी^{2}	10 सेमी	....
(ii)	120 सेमी^{2}	....	16 सेमी
(iii)	50 सेमी^{2}	10 सेमी	....
(iv)	90 सेमी^{2}	....	18 सेमी

4. हीरो के सूत्र के प्रयोग से एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि उसकी भुजाएं 51 मीटर, 52 मीटर एवं 53 मीटर हैं।

16.7 आयत का परिमाप

याद कीजिए कि एक आयत ABCD का परिमाप

$$= 2(AB+CB)$$

यदि p आयत का परिमाप है, l लंबाई तथा w चौड़ाई है तो

$$P = 2(l + w)$$

उदाहरण 16.8 : एक आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए, जिसकी लंबाई 20 सेमी तथा चौड़ाई 8 सेमी है।

हल : आयत का परिमाप $= 2(l + w)$

यहां $l = 20$ से.मी, $w = 8$ सेमी

अत:, परिमाप $= 2(20+8)$ सेमी

$= 56$ सेमी

उदाहरण 16.9 : एक आयत, जिसका परिमाप 46 सेमी तथा लंबाई 15 सेमी है, की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : $P = 2(l + w)$

यहां $P = 46$ सेमी, $l = 15$ सेमी, $w = ?$

$\therefore \quad 46 = 2(15 + w)$

$23 = 15 + w$

अथवा, $w = 8$

अत: आयत की चौड़ाई 8 सेमी है।

उदाहरण 16.10 : उस आयत की लंबाई ज्ञात कीजिए, जिसका परिमाप 2 मी. 84 सेमी तथा चौड़ाई 30 सेमी है।

हल : हम जानते हैं कि

$P = 2(l + w)$

यहां $P = 2$ मी. 84 सेमी $= 284$ सेमी

$w = 30$ सेमी, $l = ?$

$\therefore 284 = 2(l + 30)$

अथवा $142 = l + 30$

अथवा $l = 112$

अत: आयत की लंबाई 1 मी. 12 सेमी है।

उदाहरण 16.11 : यदि एक आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई से 10 सेमी अधिक है तथा उसका परिमाप 100 सेमी है तो आयत की विमाएं ज्ञात कीजिए।

हल: यहां $P = 100$ सेमी, यदि चौड़ाई $= w$ सेमी है तो लंबाई $= (w + 10)$ सेमी

हम जानते हैं कि $P = 2(l + w)$

$$\frac{100}{2} = w + w + 10$$

$50 = 2w + 10$

अथवा $40 = 2w$

अर्थात् $w = 20$

अत: आयत की चौड़ाई $= 20$ सेमी तथा लंबाई $= 30$ सेमी

देखें आपने कितना सीखा 16.3

1. आयत के लिए निम्नलिखित रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

	परिमाप	लंबाई	चौड़ाई
(i)	120 सेमी	....	20 सेमी
(ii)	60 सेमी	....	10 सेमी
(iii)	100 सेमी	30 सेमी	....
(iv)	80 सेमी	30 सेमी	....

2. किसी खेत की बाड़ (Fence) की कुल लंबाई 30 मी. है। यदि बाड़ की लंबी भुजा 8 मी. है, तो छोटी भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

3. एक आयताकार कालीन की लंबाई 100 मीटर है तथा उसका परिमाप 216 मीटर है। कालीन की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

16.8 एक वर्ग का परिमाप

हम जानते हैं कि वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत है, जिसमें लंबाई तथा चौड़ाई समान होती है।

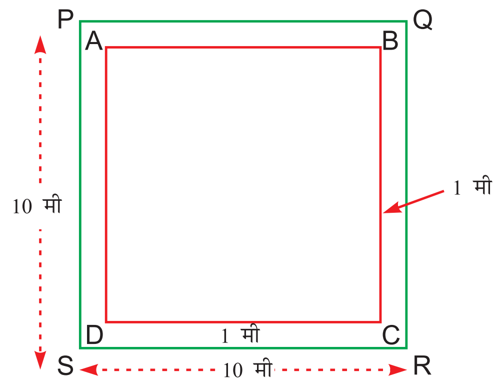
अतः वर्ग का परिमाप = $2(l + l)$ = 4. l = वर्ग की भुजा का चार गुना

उदाहरण 16.12 : एक वर्गाकार कैरम बोर्ड, जिसकी प्रत्येक भुजा 90 सेमी है, का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : कैरम बोर्ड का परिमाप = (4 × 90) सेमी

= 360 सेमी

उदाहरण 16.13 : एक वर्गाकार पार्क, जिसकी भुजा 10 मी. है, के अंदर की ओर चारों ओर 1 मी. चौड़ी सड़क है (जैसाकि चित्र 16.16 में दिखाया गया है) उस कंटीली तार की लंबाई ज्ञात कीजिए जो ABCD तथा PQRS को बाड लगा सके।



चित्र 16.16

हल : PQRS का परिमाप = 4 × 10 मी.

= 40 मी.

DC = (10 − 2) मी.

= 8 मी.

अतः ABCD का परिमाप = (4 × 8) मी.

= 32 मी.

∴ तार की कुल लंबाई = 40 मी. + 32 मी. = 72 मी.

16.9 एक आयत तथा वर्ग का क्षेत्रफल

आइए फिर से आकृति 16.8 को देखिए। हमने आलेख द्वारा ज्ञात किया था कि आयत ABCD का क्षेत्रफल 15 सेमी^{2} है।

आइए देखिए कि आयत की लंबाई कितने एकक है। यह 5 सेमी है। इसी प्रकार आयत की चौड़ाई 3 सेमी है।

5 तथा 3 की गुणा कितनी है। यह 15 है

अतः हम कहते हैं कि

आयत का क्षेत्रफल = (लंबाई × चौड़ाई)

अतः वर्ग का क्षेत्रफल = लंबाई × लंबाई

= $(\text{लंबाई})^2$ अथवा $(\text{भुजा})^2$

क्षेत्रफल, लंबाई तथा चौड़ाई में से किन्हीं दो के ज्ञात होने पर तीसरा उपरोक्त सूत्रों का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है। आइए, इसे हम उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 16.14 : उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी लंबाई 2 मी. तथा चौड़ाई 50 सेमी है।

हल : यहां l = 2 मी. = 200 सेमी, w = 50 सेमी अथवा $\frac{1}{2}$ मी.

हम जानते हैं कि $A = l \times w$

$= \left(2 \times \frac{1}{2}\right)$ मी.^{2} अथवा (200×50) सेमी^{2}

= 1 मी.^{2} अथवा 10000 सेमी^{2}

उदाहरण 16.15 : 50 सेमी भुजा वाले किसी वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहां भुजा = 50 सेमी, A = ?

हम जानते हैं कि एक वर्ग के लिए

A = $(\text{भुजा})^2$

= $(50)^2$ सेमी^{2}

= 2500 सेमी^{2}

उदाहरण 16.16 : उस आयत की लंबाई ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 400 सेमी^{2} तथा चौड़ाई 16 सेमी है।

हल : यहां A = 400 सेमी^{2}, l = ?, w = 16 सेमी

$A = l \times w$

$\therefore \quad 400 = l \times 16$

$$\text{अत: } l = \frac{400}{16} = 25$$

अत: आयत की लंबाई 25 सेमी है।

उदाहरण 16.17 : एक वर्ग का क्षेत्रफल 784 सेमी^{2} है। उसकी भुजा ज्ञात कीजिए।

हल : हम वर्ग के विषय में जानते हैं कि

$$A = (\text{भुजा})^2$$

$$\text{अथवा } 784 = (\text{भुजा})^2$$

$$\text{अत: भुजा} = \sqrt{784} = 28$$

अत: वर्ग की भुजा = 28 सेमी

उदाहरण 16.18 : उस वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 2.25 मी.^{2} है।

हल : वर्ग के विषय में

$$\text{क्षेत्रफल} = (\text{भुजा})^2$$

$$\frac{225}{100} = (\text{भुजा})^2$$

$$\text{अत: भुजा} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{15}{10} = 1.5$$

अत: वर्ग की भुजा 1.5 मी. है।

देखें आपने कितना सीखा 16.4

1. एक वर्ग के लिए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

	परिमाप	**भुजा**
(i)	....	20 सेमी
(ii)	....	2 मी.
(iii)	200 सेमी	....
(iv)	1200 सेमी	....

2. वर्ग/ आयत के लिए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

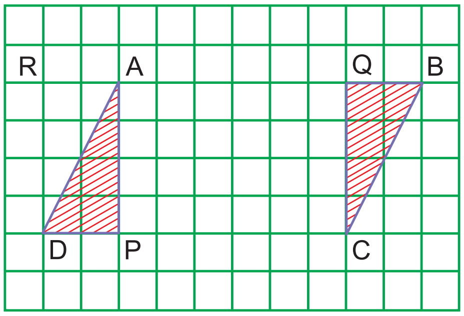
	क्षेत्रफल	लंबाई	चौड़ाई
(i)	....	40 सेमी	15 सेमी
(ii)	600 सेमी^{2}	30 सेमी	....
(iii)	2500 सेमी^{2}	1 मी.	....
(iv)	600 सेमी^{2}	....	15 सेमी
(v)	....	40 सेमी	40 सेमी

3. एक आयत की लंबाई, चौड़ाई से 50 सेमी अधिक है। यदि आयत का परिमाप 500 सेमी है तो आयत की विमाएं ज्ञात कीजिए।

4. एक वर्गाकार रसोई बगीचे का क्षेत्रफल 625 मी.^{2} है। रसोई बगीचे की भुजा ज्ञात कीजिए।

16.10 समांतर चतुर्भुज का आलेख द्वारा क्षेत्रफल

एक समांतर चतुर्भुज ABCD सेंटीमीटर ग्राफ पेपर पर बनाइए (देखिए चित्र 16.17)। $AP \perp DC$ तथा $CQ \perp AB$ खींचिए।



चित्र 16.17

ΔAPD का क्षेत्रफल $= (\frac{1}{2} \times 2 \times 4)$ सेमी^{2}

$= 4$ सेमी^{2}

इसी प्रकार, $\Delta CQB = 4$ सेमी^{2}

समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= आयत APCQ का क्षेत्रफल + APCD का क्षेत्रफल + ΔCQB का क्षेत्रफल

= (24 + 4 + 4) सेमी^{2}

= 32 सेमी^{2}

DC की लंबाई = 8 सेमी, AP की लंबाई = 4 सेमी

हम देखते हैं कि $8 \times 4 = 32$

अत: समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = आधार × संगत ऊंचाई

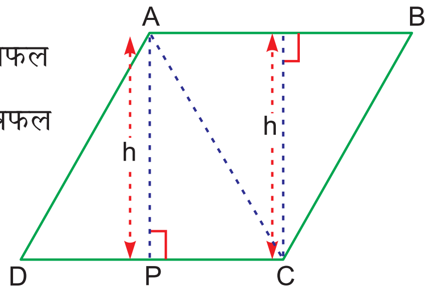
आयत DCQR का क्षेत्रफल

$= DC \times DR$

= 8 सेमी × 4 सेमी = 32 सेमी^{2}

अत: एक समांतर चतुर्भुज तथा आयत, जो एक ही आधार तथा दो समांतर रेखाओं के बीच बने हों, के क्षेत्रफल समान होते हैं।

16.11 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल



चित्र 16.18

चित्र 16.18 में बने समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$= \Delta ADC$ का क्षेत्रफल $+ \Delta ACB$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} DC \times h + \frac{1}{2} AB \times h$$

$$= \frac{1}{2} h\,(DC + AB)$$

$$= \frac{1}{2} h\,(DC + DC) \qquad ...[DC = AB]$$

$$= DC \times h$$

$$= DC \times AP$$

अत: समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × संगत ऊंचाई

16.11.1 समलंब का क्षेत्रफल

ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || CD

चित्र 16.18.1 में बने

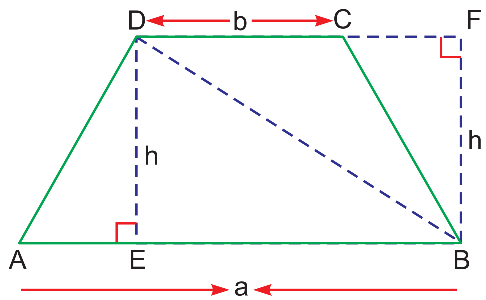
समलंब का क्षेत्रफल

$= \Delta ABD$ का क्षेत्रफल

$+ \Delta BCD$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times a \times h + \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$= \frac{1}{2} (a + b) \times h$$



चित्र 16.18.1

इसलिए, समलंब का क्षेत्रफल = (समांतर भुजाओं का योग) × ऊंचाई

आइए एक ऐसे समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं, जिसकी समांतर भुजाएं क्रमश: 20 सेमी एवं 12 सेमी हैं तथा समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 3 सेमी है। हम जानते हैं कि समलंब का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) $\times$ ऊंचाई

$= \frac{1}{2}$ $(20 + 12) \times 5$ वर्ग सेमी

$= \frac{1}{2} \times 32 \times 5$ सेमी^{2}

$= 80$ सेमी^{2}

उदाहरण 16.19 : एक समांतर चतुर्भुज, जिसका आधार 5 सेमी तथा संगत ऊंचाई 6 सेमी है, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार $\times$ संगत ऊंचाई

$= (5 \times 6)$ सेमी^{2}

$= 30$ सेमी^{2}

उदाहरण 16.20 : एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 216 सेमी^{2} है तथा उसकी एक भुजा की लंबाई 32 सेमी है। समांतर चतुर्भुज की संगत ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल : क्षेत्रफल = आधार $\times$ ऊंचाई

$216 = 32 \times$ ऊंचाई

$\therefore$ ऊंचाई $= \frac{216}{32}$ सेमी

$= 6.75$ सेमी

उदाहरण 16.21 : एक समांतर चतुर्भुज के आधार की लंबाई ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 3000 वर्ग मी. तथा दो बड़ी भुजाओं के बीच की ऊंचाई 30 मी. है (चित्र 16.19)।

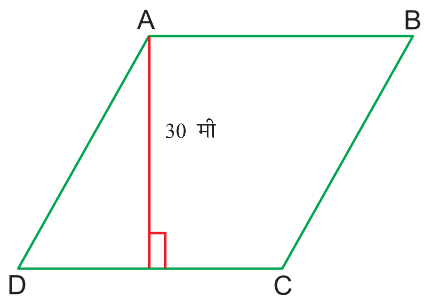
हल : समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= आधार $\times$ संगत ऊंचाई

माना आधार की लंबाई b है

$\therefore$ $b \times 30 = 3000$

$\therefore$ $b = 100$



चित्र 16.19

अर्थात् समांतर चतुर्भुज का आधार 100 मी. लंबा है।

टिप्पणी

उदाहरण 16.22 : एक समांतर चतुर्भुज, जिसका आधार 42 मी. है, का क्षेत्रफल उस त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर है, जिसका आधार 63 मी. तथा ऊंचाई 36 मी. है। समांतर चतुर्भुज की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना समांतर चतुर्भुज की ऊंचाई h है

$\therefore$ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार $\times$ ऊंचाई

$$= 42\ h \qquad ....(i)$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊंचाई}$$

$$= (\frac{1}{2} \times 63 \times 63)\ \text{मी.}^2$$

$$= 1134\ \text{मी.}^2 \qquad ....(ii)$$

दिया है कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = त्रिभुज का क्षेत्रफल

अत: 42 h = 1134

या $\quad h = \dfrac{1134}{42} = 27$

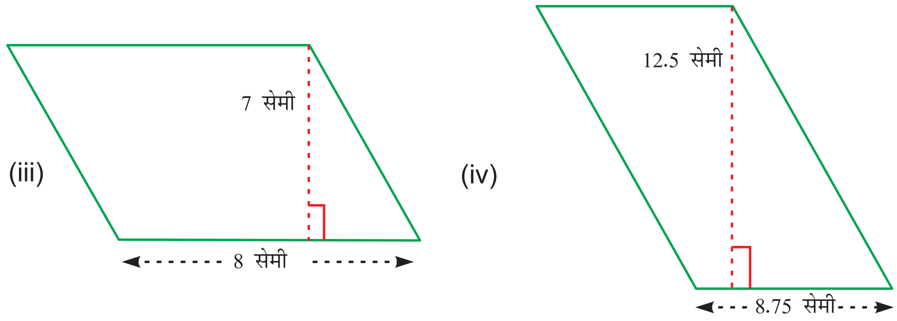
अत: समांतर चतुर्भुज की ऊंचाई 27 मी. है।

देखें आपने कितना सीखा 16.5

1. एक समांतर चतुर्भुज के लिए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

	आधार	ऊंचाई	क्षेत्रफल
(a)	32 मी.	17 मी.	....
(b)	....	14 मी.	112 मी.^{2}
(c)	1.2 सेमी	....	1.08 सेमी^{2}
(d)	13.5 मी.	$1\frac{1}{7}$ मी.	....

2. चित्र 16.20 में दिए हुए समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



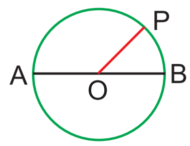
चित्र 16.20

3. निम्नलिखित समलंबों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

	समांतर भुजाओं की लम्बाइयां	उनके बीच की दूरी
(i)	30 मी. एवं 20 मी.	15 मी.
(ii)	17 सेमी एवं 40 सेमी	14.6 सेमी

16.12 वृत्त की परिधि

स्मरण कीजिए कि वृत्त किसी तल में ऐसे बिंदुओं का समूह है, जो एक स्थिर बिन्दु से सदा समान दूरी पर रहते हैं।



चित्र 16.21

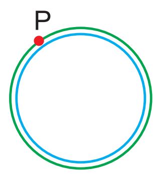
चित्र 16.21 में, O एक स्थिर बिंदु है, जो वृत्त का केंद्र है, OP वृत्त की त्रिज्या है तथा वृत्त की वह जीवा AB जो केंद्र O से होकर जाती हैं, उसका व्यास कहलाती है। आप देख सकते हैं कि व्यास त्रिज्या का दुगुना होता है।

एक वृत्त में कोई रेखाखंड नहीं होते। अत: हम वृत्त का परिमाप उस प्रकार ज्ञात नहीं कर सकते, जिस प्रकार हमने रेखीय आकृतियों, जैसे-त्रिभुज, आयत, वर्ग इत्यादि का परिमाप उनकी भुजाओं की लंबाइयों को जोड़कर ज्ञात किया था।

बिंदु P से शुरू करके वृत्त पर घूम कर फिर बिंदु P तक आने में तय की गई दूरी को वृत्त की परिधि कहते हैं।

माप द्वारा वृत्त की परिधि ज्ञात करना

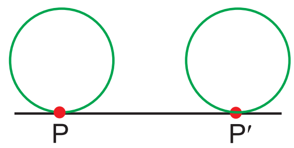
एक वृत्ताकार वस्तु के चारों ओर कसकर एक धागा इस प्रकार लपेटिए कि धागे का कोई हिस्सा एक-दूसरे के ऊपर न आए। धागे की लंबाई को मापिए। यह वृत्त की परिधि का लगभग मान दर्शाती है (चित्र 16.22)



चित्र 16.22

अन्य विधि

वृत्त पर एक बिंदु P अंकित कीजिए तथा उसे एक रेखा पर इस प्रकार घुमाइए कि वह एक चक्कर पूरा कर ले अर्थात् बिंदु P फिर रेखा को बिंदु P पर स्पर्श करे (देखिए चित्र 16.23)।



चित्र 16.23

तब PP' का माप वृत्त की परिधि का मान है।

वृत्त की परिधि तथा व्यास में संबंध

परीक्षण : 4 सेमी, 6 सेमी तथा 9.5 सेमी व्यास के तीन वृत्त खींचिए। ऊपर दिए किसी भी तरीके से वृत्त की लगभग परिधि का माप प्रत्येक के लिए कीजिए तथा परिणाम निम्नलिखित सारणी में लिखिए :

क्रम संख्या	व्यास (d)	परिधि (c)	परिधि/व्यास (c ÷ d)
1.	4 सेमी	12.6 सेमी	3.15
2.	6 सेमी	19 सेमी	3.16
3.	9.5 सेमी	30 सेमी	3.15

आप देखेंगे कि प्रत्येक बार $\frac{c}{d}$ का मान लगभग समान है। c तथा d का अनुपात सदा समान रहता है तथा उसे π से अंकित किया जाता है

अतः $= \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

अर्थात्, परिधि $= \pi \times$ व्यास

$= \pi \times 2r$, जहां r त्रिज्या है

$= 2\,\pi r$

अतः एक वृत्त की परिधि $= 2 \times \pi \times$ त्रिज्या

नोट : π के विषय में अधिक जानकारी मनोरंजनकारी तथा लाभदायक है। बेबीलोनिया वासियों ने π का मान 3 लिया था। प्राचीन ग्रीकवासियों ने π का मान $\frac{22}{7}$ अथवा 3.14 लिया था।

भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट (476 A.D. – 550 A.D.) ने π का लगभग मान 3.1416 दिया था। आजकल संगणक (Computer) की सहायता से हमने π का मान दशमलव के 5 लाख स्थानों तक ज्ञात कर लिया है। π का मान दशमलव के 20 स्थानों तक 3.14159 26535 89793 23846 है

आप यह देखेंगे कि यह संख्या न तो आवर्ती दशमलव है और न ही सांत दशमलव है। अतः π एक अपरिमेय संख्या है। फिर भी गणना में हम π का लगभग मान $\frac{22}{7}$ अथवा 3.14 लेंगे।

$\pi \cong \frac{22}{7}$ अथवा 3.14

उदाहरण 16.33 : वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए, जब उसकी

(i) त्रिज्या = 3.5 सेमी (ii) व्यास = 1.75 सेमी ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हल : हम जानते हैं कि परिधि = $2\pi r$

अतः (i) परिधि = $\left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\right)$ सेमी

= 22 सेमी

(ii) परिधि = $2\pi r$

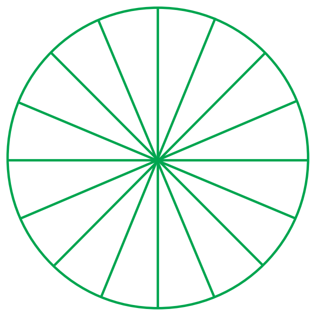
यहां $r = \frac{1.75}{2}$ सेमी = $\frac{7}{8}$ सेमी

अतः परिधि = $\left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{8}\right)$ सेमी

= 5.5 सेमी

16.13 वृत्त का क्षेत्रफल

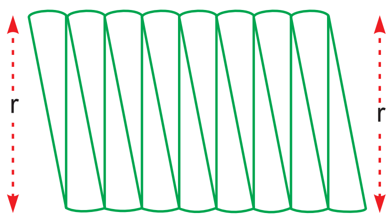
किसी भी त्रिज्या (r) का एक वृत्त खींचिए। उसे 16 बराबर भागों में बांटिए।



चित्र 16.24

इन 16 वृत्तखंडों को काटकर चित्र 16.25 की तरह जोड़िए।

क्योंकि आधे वृत्तखंड ऊपर हैं तथा आधे नीचे, अतः चित्र 16.25 में बने लगभग समांतर चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएं $\frac{1}{2}$ $(2\pi r)$ अर्थात् πr है तथा ऊंचाई r है



चित्र 16.25

टिप्पणी

अतः वृत्त का क्षेत्रफल = लगभग बने समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के समान

$$= \pi\, r.r = \pi\, r^2$$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi \times (\text{त्रिज्या})^2$

उदाहरण 16.24 : एक वृत्ताकार चटाई तथा वर्गाकार चटाई दोनों का परिमाप 132 सेमी है। कौन-सी आकृति अधिक क्षेत्रफल घेरती है?

हल : (i) वर्गाकार चटाई का परिमाप = 132 सेमी

अतः वर्गाकार चटाई की भुजा = 33 सेमी

वर्गाकार चटाई का क्षेत्रफल = (33×33) सेमी^{2}

$= 1089$ सेमी^{2}

(ii) वृत्ताकार चटाई की परिधि = 132 सेमी

अतः वृत्ताकार चटाई की त्रिज्या = $\dfrac{132}{2\pi} = \dfrac{132}{2} \times \dfrac{7}{22}$ सेमी

$= 21$ सेमी

वृत्ताकार चटाई का क्षेत्रफल = $\pi\, r^2$

$= \left(\dfrac{22}{7} \times 21 \times 21\right)$ सेमी^{2}

$= 1386$ सेमी^{2}

अतः वृत्ताकार चटाई का क्षेत्रफल अधिक है।

देखें आपने कितना सीखा 16.6

1. वृत्त के लिए निम्नलिखित रिक्त स्थान भरिए :

	त्रिज्या	परिधि	क्षेत्रफल
(i)	3.5 सेमी	....	....
(ii)	14 सेमी	....	....
(iii)	....	88 सेमी	....
(iv)	....	....	2464 सेमी^{2}

2. उस वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 77 सेमी है।

3. एक वृत्ताकार प्लेट का क्षेत्रफल 256 सेमी^{2} है। उसको पिघलाकर एक समान क्षेत्रफल वाली वर्गाकार प्लेट बनाई जाती है। वर्गाकार प्लेट का परिमाप तथा भुजा ज्ञात कीजिए।

4. एक वृत्ताकार हार की त्रिज्या 7 सेमी है। उसमें कुछ मोती पिरोए गए हैं, जिनमें से प्रत्येक 2 सेमी लंबाई की जगह घेरता है। यदि सभी मोतियों के बीच कुल 4 सेमी जगह खाली बची हुई हो, तो हार में मोतियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

चित्र 16.26

5. एक वृत्ताकार लकड़ी की फट्टी की त्रिज्या 14 सेमी है। दूसरी लकड़ी की फट्टी आयताकार है, जिसकी लंबाई 25 सेमी तथा चौड़ाई 20 सेमी है। दोनों लकड़ी की फट्टियों से घिरे हुए क्षेत्रों के क्षेत्रफलों की तुलना कीजिए।

आइए दोहराएं

- एक सरल बंद आकृति द्वारा तल के घेरे गए क्षेत्र को उसका क्षेत्र कहते हैं तथा उस क्षेत्र की माप को उस आकृति का क्षेत्रफल कहते हैं।
- एक वर्ग सेमी अथवा एक वर्ग मी. क्षेत्रफल का मानक एकक है।
- किसी आकृति की सीमाओं के साथ-साथ एक पूरा चक्कर लगाने में तय की गई दूरी को आकृति का परिमाप कहते हैं।
- किसी त्रिभुज का परिमाप उसकी सभी भुजाओं के मापों का योग है।
- एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप उसकी भुजा के माप का तीन गुना है।
- त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ संगत ऊंचाई
- आयत का परिमाप = 2 (लंबाई + चौड़ाई)
- आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई
- वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा
- वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2
- समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × संगत ऊंचाई
- $\pi = \dfrac{\text{वृत की परिधि}}{\text{वृत का व्यास}}$

- π का लगभग मान 3.14 अथवा $\frac{22}{7}$ है।
- वृत्त की परिधि $2\pi r$ है, जहां r वृत्त की त्रिज्या है।
- वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$, जहां r वृत्त की त्रिज्या है।

आइए अभ्यास कीजिए

1. उस त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए, जिसकी भुजाएं निम्नलिखित हैं:

   (a) 13.5 सेमी, 14.1 सेमी, 16.3 सेमी

   (b) 12 मी., 14 मी., 18 मी.

2. समबाहु त्रिभुजों के परिमाप ज्ञात कीजिए, जिनकी भुजा निम्नलिखित हैं:

   (a) 5.1 सेमी (b) 7.2 मि.मी. (c) 8.25 मी.

3. निम्नलिखित त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

	आधार	संगत ऊंचाई
(i)	8.5 सेमी	5.6 सेमी
(ii)	6.8 सेमी	3.5 सेमी
(iii)	8 मी.	15 मी.

4. किसी त्रिभुज के लिए रिक्त स्थानों को भरिए:

	आधार	ऊंचाई	क्षेत्रफल
(a)	18 सेमी	....	36 सेमी^{2}
(b)	....	5 मी.	10 मी.^{2}
(c)	2.8 सेमी	3.5 सेमी	....

5. एक आयत के लिए रिक्त स्थानों को भरिए:

	लंबाई	चौड़ाई	परिमाप
(i)	8.3 सेमी	1.7 सेमी	....
(ii)	....	6 मी.	48 मी.
(iii)	37 सेमी	....	100 सेमी

6. एक आयत के लिए रिक्त स्थानों को भरिए:

	लंबाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
(i)	5.5 मी.	4.5 मी.	....
(ii)	8 मी.	....	56 मी.^{2}
(iii)	....	15 मी.	270 मी.^{2}

7. एक वर्ग के लिए रिक्त स्थानों को भरिए:

(a) भुजा — परिमाप

(i) 5 मी. — ....

(ii) .... — 72 मी.

(b) भुजा — क्षेत्रफल

(i) 4 मी. — ....

(ii) .... — 144 मी.^{2}

8. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके आंकड़े निम्नलिखित हैं:

	आधार	ऊंचाई
(i)	15 सेमी	3.2 सेमी
(ii)	8 सेमी	22 सेमी
(iii)	16 मी.	12 मी.

9. उस वृत्त की त्रिज्या तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि:

(i) 4400 मी. है (ii) 110 सेमी है

10. उस वृत्त की त्रिज्या तथा परिधि ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल:

(i) 154 सेमी^{2} है (ii) 616 सेमी^{2} है

11. एक गाय एक आयताकार खेत, जिसकी विमाएं 20 मी. $\times$ 15 मी. हैं, के कोने में 10.5 मी. लंबी रस्सी से बंधी है। खेत के बाहर गाय कितने क्षेत्र पर चर सकती है?

12. किसका क्षेत्रफल अधिक है और कितना?

–एक वर्ग जिसका परिमाप 44 सेमी है अथवा एक वृत्त जिसकी परिधि 44 सेमी है।

13. एक समलंब का क्षेत्रफल 372 मी.^{2} है और समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 12 मीटर है। यदि एक समांतर भुजा 40 मी. लंबी है तो दूसरी समांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

14. एक त्रिभुजाकार खेत की भुजाएं 165 मी., 143 मी. तथा 154 मी. हैं। हीरो के सूत्र की सहायता से उस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 16.1

1. (i) 16 सेमी^{2} (ii) 24 सेमी^{2} (iii) 16 सेमी^{2}

2. (i) क्षेत्र (ii) माप (iii) एकक वर्ग (iv) दूरी

   (v) 3 × समबाहु त्रिभुज की भुजा

3. 12 सेमी

4. 24 सेमी

देखें आपने कितना सीखा 16.2

1. (a) 14 वर्ग एकक (b) $12\frac{1}{2}$ वर्ग एकक

2. (i) 16 सेमी^{2} (ii) 16 सेमी^{2} (iii) $\frac{63}{2}$ सेमी^{2}

3. (i) 6 सेमी (ii) 15 सेमी (iii) 10 सेमी

4. 1170 मीटर^2

देखें आपने कितना सीखा 16.3

1. (i) 40 सेमी (ii) 20 सेमी (iii) 20 सेमी

   (iv) 10 सेमी

2. 7 मी.

3. 8 मीटर

देखें आपने कितना सीखा 16.4

1. (i) 80 सेमी (ii) 8 मी. (iii) 50 सेमी (iv) 300 सेमी
2. (i) 600 सेमी^{2} (ii) 20 सेमी (iii) 25 सेमी
   (iv) 40 सेमी (v) 1600 सेमी^{2}
3. लंबाई = 150 सेमी, चौड़ाई = 100 सेमी
4. 25 मी.

देखें आपने कितना सीखा 16.5

1. (a) 544 मी.^{2} (b) 8 मी. (c) 0.9 सेमी (d) $15\frac{3}{7}$ मी.^{2}
2. (i) 260 सेमी^{2} (ii) 40 सेमी^{2} (iii) 56 सेमी^{2} (iv) 109.375 सेमी^{2}
3. (i) 375 मी.^{2} (ii) 416.1 सेमी^{2}

देखें आपने कितना सीखा 16.6

1. (i) 22 सेमी, $\frac{77}{2}$ सेमी^{2} (ii) 88 मी., 616 मी.^{2} (iii) 14 सेमी, 616 सेमी^{2}
   (iv) 28 सेमी, 176 सेमी
2. त्रिज्या = $\frac{49}{4}$ सेमी, क्षेत्रफल = $\frac{3773}{8}$ सेमी^{2}
3. 16 से.मी, 64 सेमी
4. 20
5. वृत्ताकार शीट का क्षेत्रफल 616 सेमी^{2} है, आयताकार शीट का क्षेत्रफल 500 सेमी^{2} है। वृत्ताकार शीट का क्षेत्रफल आयताकार शीट से 116 सेमी^{2} अधिक है।

आइए अभ्यास कीजिए

1. (a) 43.9 सेमी (b) 44 मी.
2. (a) 15.3 सेमी (b) 21.6 मि.मी. (c) 24.75 मी.
3. (i) 23.8 सेमी^{2} (ii) 11.9 सेमी^{2} (iii) 60 मी.^{2}

4. (a) 4 सेमी   (b) 4 मी.   (c) 4.9 सेमी^{2}

5. (i) 20 सेमी   (ii) 18 मी.   (iii) 13 मी.

6. (i) 24.75 मी.^{2} (ii) 7 मी.   (iii) 18 मी.

7. (A) (i) 20 मी.   (ii) 18 सेमी

   (B) (i) 16 मी.^{2} (ii) 12 सेमी

8. (i) 48 सेमी^{2} (ii) 176 सेमी^{2} (iii) 192 सेमी^{2}

9. (i) त्रिज्या = 700 मी., क्षेत्रफल = 1540000 मी.^{2}

   (ii) त्रिज्या = 17.5 सेमी, क्षेत्रफल = 962.5 सेमी^{2}

10.

	त्रिज्या	परिधि
(i)	7 सेमी	44 सेमी
(ii)	14 सेमी	88 सेमी

11. 259.875 मी.^{2}

12. वृत्ताकार का क्षेत्रफल वर्गाकार से 33 सेमी^{2} अधिक है।

13. 22 मी.

14. 10164 मी.^{2}

17

ठोसों का आयतन

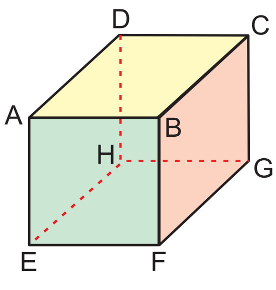
आपने देखा है कि बाजार में बेची जाने वाली अधिकतर वस्तुएं टीनों, गत्ते के डिब्बों, बक्सों इत्यादि में बांधी जाती हैं। यह सब अधिकतर आकृति में घनाभाकार होती हैं। फिर हमारे आसपास की अधिकतर वस्तुएं-लोहे की अल्मारी, बक्से, रेफ्रीजरेटर आदि घनाभ आकृति की होती हैं। अत: हमारे लिए घनाभ के बारे में जानना आवश्यक है। विशेषतया घनाभों की फलकों की संख्या, पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन का ज्ञान हमारे लिए लाभप्रद है।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- घनाभ के शीर्षों, किनारों और पृष्ठों की संख्या के बारे में
- घन की घनाभ के विशेष रूप में पहचान
- घन और घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र
- आयतन को ठोस द्वारा घिरे त्रिविम क्षेत्र के रूप में
- घन और घनाभ के आयतन ज्ञात करने के सूत्र
- इन संकल्पनाओं पर आधारित सरल प्रश्न

17.1 घनाभ के फलक

हम अपने दैनिक जीवन में भिन्न-भिन्न वस्तुएं, जैसे कि बक्से, ईंटें, माचिस की डिब्बी, चाय के डिब्बे, जूतों के डिब्बे आदि देखते हैं। ये सभी संलग्न आकृति से मिलती हैं। इन्हें घनाभ कहते हैं।



चित्र 17.1

एक घनाभ के 6 फलक होते हैं, जिनमें से प्रत्येक आयताकार है। प्रत्येक विपरीत फलक सर्वांगसम है। सबसे ऊपर और नीचे के फलक क्रमश: ABCD और EFGH हैं। अन्य चार फलक EHDA, FGCB, HGCD और EFBA हैं।

17.2 घनाभ के किनारे और शीर्ष

दो आसन्न फलक एक रेखा में मिलते हैं। इस रेखा को घनाभ का किनारा कहते हैं। इस प्रकार फलक ABCD और BCGF किनारे BC में मिल रहे हैं। इसी प्रकार फलक BCGF और EFGH किनारे GF में मिल रहे हैं। एक घनाभ में कुल 12 किनारे होते हैं। इनके नाम हैं : AE, DH, BF, CG, EF, HG, AB, DC, FG, EH, BC और AD ।

दो सहवसानी (आसन्न) किनारे एक बिंदु में मिलते हैं। इस बिंदु को शीर्ष बिंदु या शीर्ष कहते हैं। अत: A, B, C, D, E, F, G और H घनाभ के 8 शीर्ष हैं।

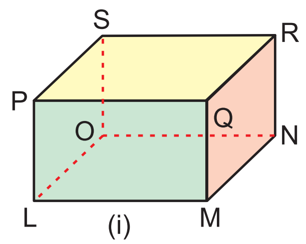
अत: एक घनाभ के 8 शीर्ष और 12 किनारे होते हैं।

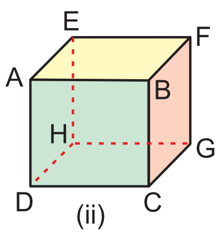
17.3 घन, घनाभ एक विशेष रूप में

एक घनाभ जिसके सभी किनारे बराबर हों, घन कहलाता है। अत: एक घन के सभी फलक वर्ग होते हैं, जबकि घनाभ में कुछ अथवा सभी फलक आयत होते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 17.1

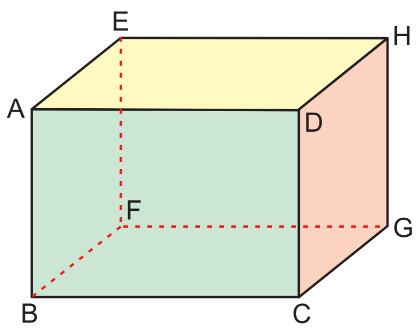
1. घनाभ और घन की दी गई आकृतियों से उनके सभी फलकों, किनारों और शीर्षों के नाम लिखिए:





चित्र 17.2

2. दी गई आकृति को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:



चित्र 17.3

(i) ABCD के समांतर फलक का नाम लिखिए।

(ii) उन फलकों के नाम लिखिए, जो कि फलक DCGH के आसन्न हों।

(iii) उन फलकों के नाम लिखिए, जो किनारे AD में मिलते हों।

(iv) उन 3 किनारों के नाम लिखिए, जो शीर्ष F पर मिलते हों।

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) एक घनाभ में किनारों की संख्या .... है।

(ii) एक घन में फलकों की संख्या .... है।

(iii) एक घन में सभी शीर्ष बिन्दुओं की संख्या .... है।

17.4 एक घनाभ और घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

याद कीजिए कि एक घनाभ के 6 आयताकार फलक होते हैं। अत: एक घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल इन 6 फलकों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है।

दो समांतर फलकों ABCD और EFGH का क्षेत्रफल = $2 \times l \times b$

इसी प्रकार समांतर फलकों ABFE और DCGH का क्षेत्रफल = $2 \times b \times h$

तथा शेष फलकों ADHE और BCGF का क्षेत्रफल = $2 \times l \times h$

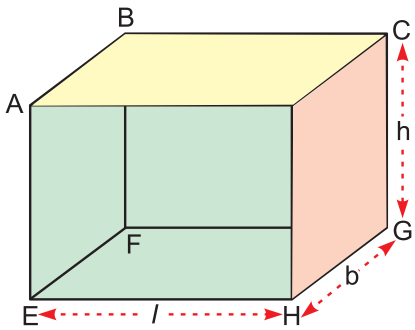
$\therefore$ घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$

= 2 (लंबाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊंचाई + लंबाई × ऊंचाई)

याद कीजिए कि घन एक घनाभ का विशेष रूप है, जिसमें लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई सभी बराबर हैं तथा घन की भुजा के बराबर है।

अत: घन की पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 (भुजा)^2

आइए, अब हम इन सूत्रों को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें।



चित्र 17.4

उदाहरण 17.1 : एक घनाभ की विमाएं 8 सेमी, 9 सेमी और 10 सेमी हैं। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहां पर लंबाई = 8 सेमी, चौड़ाई = 9 सेमी और ऊंचाई = 10 सेमी

$\therefore$ घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(8 \times 9 + 9 \times 10 + 10 \times 8)$ वर्ग सेमी

$= 2(72 + 90 + 80)$ वर्ग सेमी

$= 484$ वर्ग सेमी

उदाहरण 17.2 : एक घनाभाकार बक्से की विमाएं 50 सेमी 40 सेमी तथा 30 सेमी हैं। 125 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से बक्से में लगी चादर का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : आवश्यक चादर का क्षेत्रफल = बक्से का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(50 \times 40 + 40 \times 30 + 30 \times 50)$ वर्ग सेमी

$= 9400$ वर्ग सेमी

$= 0.94$ वर्ग मी.

$\therefore$ चादर का मूल्य $= 0.94 \times 125$ रुपये

$= 117.50$ रुपये

उदारहण 17.3 : एक घन की भुजा 15 सेमी लंबी है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6l^2$

$= 6 \times 15 \times 15$ वर्ग सेमी

$= 1350$ वर्ग सेमी

देखें आपने कितना सीखा 17.2

1. एक घन का किनारा दिया गया है। प्रत्येक घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

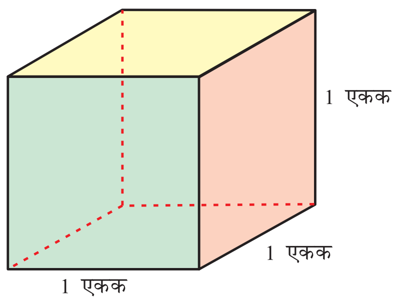
   (i) 11 सेमी (ii) 2.5 सेमी (iii) 5 मी. (iv) 2 मी. 15 सेमी

2. एक तेल के कनस्तर की विमाएं 25 सेमी, 35 सेमी और 45 सेमी हैं। कनस्तर को रंग करवाने पर 5 पैसे प्रति वर्ग सेमी की दर से क्या खर्च आएगा?

3. एक घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इसकी विमाएं निम्न हैं : 30 सेमी × 10 सेमी × 12.5 सेमी।

17.5 आयतन

हम अपने दैनिक जीवन में डिब्बे, ड्रम तथा बोतल की धारिता ज्ञात करने की समस्या को देखते हैं। यह समस्याएं इनके आयतन ज्ञात करने से संबंधित हैं। यहां पर हम केवल घन और घनाभ के आयतन ज्ञात करेंगे।



चित्र 17.5

याद कीजिए कि एक ठोस का आयतन उस द्वारा घेरे हुए त्रिविम क्षेत्र का माप होता है। जिस प्रकार हमने क्षेत्रफल की 1 इकाई के लिए 1 वर्ग इकाई का प्रयोग किया था, हम आयतन के माप की इकाई ज्ञात करेंगे।

वर्ग की इकाई 1 वर्ग से संकेत लेते हुए, हम आयतन की इकाई एक घन इकाई लेंगे, 1 घन जिसकी प्रत्येक भुजा 1 इकाई लेते हैं। एक घन, जिसकी प्रत्येक भुजा 1 सेमी है, 1 घन सेमी घन कहलाता है तथा इसे 1 सेमी^{3} द्वारा व्यक्त करते हैं। इसी प्रकार हम 1 मीटर वाले घन को 1 घन मी. या 1 मी.^{3} द्वारा लिखते हैं।

17.6 एक घनाभ और घन का आयतन

संलग्न आकृति में एक घनाभ को देखिए। इसमें दो परत है, जिसमें प्रत्येक में 18 इकाई वर्ग हैं। घनाभ की ऊंचाई 2 सेमी है। अत: इसमें 36 इकाई घन हैं।

घनाभ का आयतन = 36 घन सेमी

यदि हम 6 को 3 से तथा फिर 2 से गुणा कर दें तो यही परिणाम हमें प्राप्त हो जाता है।

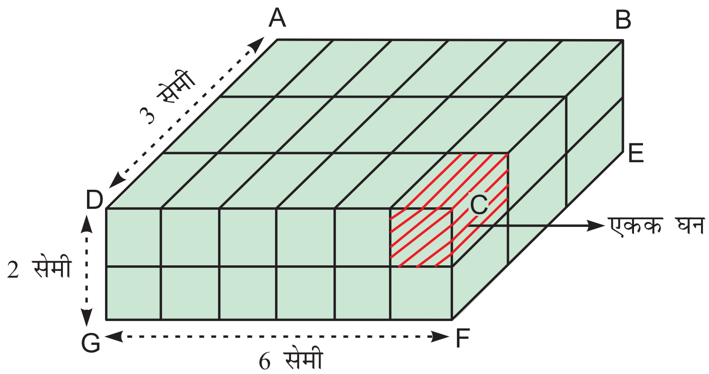
अत: घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$ घन इकाई

याद कीजिए कि घन एक घनाभ का विशेष रूप है, जिसमें

l = b = h = घन की भुजा

$\therefore$ घन का आयतन = भुजा × भुजा × भुजा

= (भुजा)^3



चित्र 17.6

उदाहरण 17.4 : एक घनाभ लकड़ी के टुकड़े की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमश: 10 सेमी, 8 सेमी और 6 सेमी हैं। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$

लकड़ी के टुकड़े का आयतन = (10 × 8 × 6) घन सेमी

= 480 घन सेमी

उदाहरण 17.5 : एक गत्ते के डिब्बे की विमाएं (भुजाएं) 80 सेमी, 40 सेमी और 20 सेमी हैं। इसमें 10 सेमी भुजा वाले कितने घन बक्से रखे जा सकते हैं!

हल : गत्ते के डिब्बे का आयतन = $(80 \times 40 \times 20)$ घन सेमी

घन बक्से का आयतन = $(10 \times 10 \times 10)$ घन सेमी

$\therefore$ घन बक्सों की अभीष्ट संख्या = $\dfrac{80 \times 40 \times 20}{10 \times 10 \times 10} = 64$

उदाहरण 17.6 : एक घनाभाकार बक्से की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 6 सेमी और 3 सेमी हैं। यदि उसका आयतन 72 घन सेमी हो तो बक्से की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल : आयतन $V = l \times b \times h$

यहां पर V = 72 सेमी, l = 6 सेमी, b = 3 सेमी

$\therefore \quad 72 = 6 \times 3 \times h$

या $h = 4$

$\therefore$ बक्से की ऊंचाई = 4 सेमी

देखें आपने कितना सीखा 17.3

1. एक घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसमें:

   (i) लंबाई = 10 सेमी, चौड़ाई = 8 सेमी और ऊंचाई = 4 सेमी

   (ii) लंबाई = 8.5 सेमी, चौड़ाई = 6.5 सेमी और ऊंचाई = 5.5 सेमी

   (iii) लंबाई = 1.5 मी., चौड़ाई = 25 सेमी और ऊंचाई = 15 सेमी

2. एक घन का किनारा 12 सेमी है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

3. दो घनों के किनारे 3 सेमी और 6 सेमी हैं। इनके आयतनों की तुलना कीजिए।

आइए दोहराएं

- घनाभ ऐसी आकृति है, जिसमें 6 फलक, 12 किनारे और 8 शीर्ष हैं।
- घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई इसकी विमाएं कहलाती हैं।
- घनाभ जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई सभी बराबर हों, घन कहलाता है।
- एक ठोस द्वारा घिरे त्रिविम क्षेत्र का माप उसका आयतन कहलाता है।
- 1 सेमी किनारे वाला घन जिसका आयतन 1 घन सेमी है, आयतन की इकाई कहलाता है।

- इस पाठ में ज्ञात किए गए सूत्र

  (a) घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(l \times b + b \times h + h \times l)$

  $= 2($लंबाई $\times$ चौड़ाई $+$ चौड़ाई $\times$ ऊंचाई $+$ ऊंचाई $\times$ लंबाई$)$

  (b) घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6l^2$

  $= 6($भुजा$)^2$

  (c) घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$

  $=$ लंबाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊंचाई

  (d) घन का आयतन $= ($भुजा$)^3$

आइए अभ्यास करें

1. एक तरणताल की लंबाई 20 मी., चौड़ाई 15 मी. और गहराई 8 मी. है। इसकी दीवारों और फर्श पर सीमेंट करवाने पर 250 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से क्या खर्च आएगा?

   (संकेत : कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल के सूत्र से छत का क्षेत्रफल घटा दीजिए। यहां पर पृष्ठीय क्षेत्रफल $= [2(lb + bh + hl) - lb] = lb + 2bh + 2lh$

2. एक घन संदूक का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका किनारा 15 सेमी हो।

3. 0.5 मी. लंबा, 30 मी. चौड़ा और 20 सेमी ऊंचा एक बंद गत्ते का बक्सा बनाने के लिए कितना गत्ता चाहिए?

4. एक चाक के डिब्बे की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमश: 16 सेमी, 8 सेमी और 6 सेमी हैं। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. एक घनाभाकार साबुन की टिक्की की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमश: 10 सेमी, 6 सेमी और 5 सेमी हैं। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

6. एक घन का आयतन क्या होगा यदि

   (i) इसके किनारे को दो गुना कर दिया जाए?

   (ii) इसके किनारे को आधा कर दिया जाए?

7. एक घनाभाकार बर्तन की लंबाई 10 सेमी और चौड़ाई 8 सेमी है। इसमें यदि 480 घन सेमी तरल पदार्थ आता हो तो इसकी ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

8. एक माचिस की डिब्बी के माप 4 सेमी $\times$ 3 सेमी $\times$ 2.5 सेमी हैं। उस पैकेट का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसमें ऐसी 10 डिब्बियां हों।

9. एक घनाभ का आयतन 640 घन सेमी है। यदि इसकी लंबाई और ऊंचाई क्रमश: 10 सेमी और 8 सेमी हों तो घनाभ की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

10. एक चाय का डिब्बा 10 सेमी $\times$ 6 सेमी $\times$ 5 सेमी माप का है। एक गत्ते के डिब्बे में ऐसे कितने चाय के डिब्बे रखे जा सकते हैं। यदि इसकी विमाएं 60 सेमी $\times$ 36 सेमी $\times$ 30 सेमी हों?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 17.1

1.

	फलक	शीर्ष	किनारे
(i)	PQRS, LMNO	P, Q, R, S	LM, OQ, PQ, SR
	LMQP, ONRS	L, M, N, O	PS, LO, MN, QR
	PSOL, QRNM		LP, MQ, OS, NR
(ii)	ABCD, EFGH	A, B, C, D	AB, DC, EF, HG
	ADHE, BCGF	E, F, G, H	AD, BC, EH, FG
	ABFE, DCGH		DH, CG, AE, BF

2. (i) DCGH (ii) ADHE, EHGF, BCGF, ABCE

   (iii) ADHF, ADCB (iv) BF, GF, EF

3. (i) 12 (ii) 6 (iii) सर्वांगसम (समान)

देखें आपने कितना सीखा 17.2

1. (i) 726 सेमी^{2} (ii) 37.50 सेमी^{2} (iii) 150 मी.^{2} (iv) 27.735 सेमी^{2}

2. ₹ 357.5

3. 1600 सेमी^{2}

देखें आपने कितना सीखा 17.3

1. (i) 320 घन सेमी (ii) 303.875 घन सेमी (iii) $\frac{9}{160}$ घन मी.

2. 1728 घन सेमी

3. (i) 1 : 8 (छोटे घन का आयतन = 27 घन सेमी

(बड़े घन का आयतन = 216 घन सेमी)

आइए अभ्यास करें

1. ₹ 215000
2. 1350 वर्ग सेमी
3. 6200 वर्ग सेमी
4. 544 वर्ग सेमी
5. 300 घन सेमी
6. (i) 8 गुना (ii) $\frac{1}{8}$ गुना
7. 6 सेमी
8. 300 घन सेमी
9. 8 सेमी
10. 216 डिब्बे

18

सांख्यिकी से परिचय

क्या आप जानते हैं कि भारत विश्व का जनसंख्या की दृष्टि से दूसरा सबसे बड़ा देश है? भारत में प्रति 1000 पुरुषों की तुलना में 940 स्त्रियां हैं। यहां पर साक्षरता की दर 74.04 प्रतिशत है। यह ऐसे आंकड़े हैं, जिन्हें आपने अपनी सामाजिक ज्ञान की पुस्तक में पढ़ा होगा या जिनके बारे में आपने अपने अध्यापकों या मित्रों से सुना होगा। क्या आपने कभी अपने पास के गांवों में सबसे बड़े गांव के बारे में सोचा है? आपके गांव में पुरुषों की तुलना में कितनी स्त्रियां हैं? क्या आप बता सकते हैं कि आपके मित्रों में से कितने मित्र विद्यालयों में जा रहे हैं तथा कितने अपने माता–पिता की कृषि में सहायता कर रहे हैं? इन प्रश्नों के उत्तर देना आपके लिए कठिन कार्य होगा। सांख्यिकी, गणित की एक ऐसी शाखा है, जो इस प्रकार की सूचनाओं का विवरण रखती है। आओ हम देखें कि सांख्यिकी ऐसी समस्याओं को किस प्रकार हल करती है।

आइए एक उदाहरण लीजिए। मान लीजिए कि आपने गणित की परीक्षा दी है। एक दिन आप देखते हैं कि आपके कुछ मित्र प्रसन्नता से विद्यालय से बाहर आ रहे हैं। आपने उनसे पूछा कि क्या घटना घटी है? उन्होंने उत्तर दिया, "कार्यालय में जाओ और अपने अंक देख लो।" अहा, मैंने 100 में से 65 अंक प्राप्त किए हैं। आपने भी उनके साथ आनंद उठाया।

जब आप घर पहुंचे तो आपके पिताजी ने आपसे प्राप्तांकों के बारे में पूछा तथा उन्होंने कक्षा में अधिकतम तथा न्यूनतम प्राप्तांकों के बारे में पूछा तथा परीक्षा में कितने विद्यार्थी सफल तथा कितने असफल हुए, यह भी जानना चाहा। कितने विद्यार्थियों ने 60 प्रतिशत से अधिक अंक प्राप्त किए इत्यादि? अब आप क्या करेंगे? आइए हम इस पाठ को पढ़ें और ऐसे प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयत्न करें।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- आंकड़े क्या होते हैं?
- आंकड़े कितने प्रकार के होते हैं?
- आंकड़ों का संकलन कैसे किया जाता है। आंकड़ों को कैसे प्रस्तुत किया जाता है।
- दंड आलेख को पढ़ना और निष्कर्ष निकालना
- दंड आलेख खींचने के लिए उचित मापांक लेना तथा दिए गए आंकड़ों का दंड आलेख खींचना
- वृत्त चित्र को पढ़ना और दिए गए आंकड़ों के वृत्त चित्र खीचना।

18.1 आंकड़ों का संकलन

अपने पिताजी के प्रश्नों के उत्तर देने के लिए आपको कुछ कार्य करने होंगे। सबसे पहले आपको सभी विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांक ज्ञात करने होंगे। इन अंकों का संकलन करने की दो विधियां हैं। पहली विधि में आप प्रत्येक विद्यार्थी से उसके द्वारा प्राप्त अंक ज्ञात करेंगे तथा दूसरी विधि से आप यह जानकारी विद्यालय के कार्यालय से ज्ञात कर लेंगे।

पहली अवस्था में आप प्रत्येक विद्यार्थी से अलग-अलग उसके द्वारा प्राप्त अंक पूछेंगे तथा सूचना को अपने पास एकत्रित कर लेंगे। मान लीजिए 20 विद्यार्थी हैं, तब आप निम्नलिखित सूचना प्राप्त करेंगे :

20	25	30	30	65	72	49	57	25	45
30	57	57	72	49	57	45	38	38	65

इस उदाहरण में विद्यार्थी सूचना का स्रोत हैं, क्योंकि आप उनसे सीधे सूचना प्राप्त कर रहे हैं। इन संख्याओं को आंकड़े कहते हैं। यहां पर प्रत्येक संख्या (व्यक्तिगत प्राप्तांक) एक प्रेक्षण कहलाती है, क्योंकि प्रत्येक बार आपने अपने मित्रों से उनके अंक पूछकर तालिका में लिखे हैं।

वह आंकड़े, जो स्रोत से सीधे इकट्ठे किए जाएं, प्राथमिक आंकड़े कहलाते हैं। यहां पर प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा प्राप्तांक प्राथमिक आंकड़े हैं और विद्यार्थी प्राथमिक स्रोत हैं।

आंकड़े, जो मौलिक होते हैं तथा जिनको व्यक्तिगत स्तर पर इकट्ठा किया जाता है, प्राथमिक आंकड़े कहलाते हैं तथा वह स्रोत जिनसे इन आंकड़ों को इकट्ठा किया जाता है, प्राथमिक स्रोत कहलाते हैं।

दूसरी अवस्था में आपको विद्यालय के कार्यालय में जाना पड़ेगा तथा कार्यालय से सभी विद्यार्थियों के द्वारा प्राप्त अंक लेना होगा। यहां जो आंकड़े आप विद्यालय के रजिस्टर से प्राप्त करते हैं, द्वितीयक (गौण) आंकड़े कहलाते हैं तथा विद्यालय का कार्यालय द्वितीयक स्रोत कहलाता है।

अब क्या आप सोचते हैं कि आप अपने पिताजी के द्वारा पूछे गए प्रश्नों के उत्तर देने में सक्षम होंगे?

सीधे रूप में यह कहना कठिन होगा कि अधिकतम तथा न्यूनतम अंक कितने हैं, गणित में कितने विद्यार्थी उत्तीर्ण तथा कितने अनुत्तीर्ण हुए? यह सब जानने के लिए आपको कुछ और क्रियाएं करनी होंगी। पर इन सब कार्यों के लिए आपके द्वारा एकत्रित आंकड़े आधार होंगे। आप इन आंकड़ों को यथाप्राप्त या अपरिष्कृत आंकड़े कह सकते हैं। अत: मूल आंकड़े जो आपने इकट्ठे किए, अपरिष्कृत आंकड़े कहलाते हैं। इन आंकड़ों को आगे उचित वर्गीकरण करने की आवश्यकता है, जिससे आप अपने पिता द्वारा पूछे गए प्रश्नों के उत्तर दे सकेंगे।

देखें आपने कितना सीखा 18.1

उचित शब्दों द्वारा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(a) स्रोत से मौलिक रूप में एकत्रित किए गए आंकड़े .... आंकड़े कहलाते हैं।

(b) प्राथमिक आंकड़ों का स्रोत .... स्रोत कहलाता है।

(c) जब आप दूसरों द्वारा एकत्रित या उपलब्ध स्रोत से प्राप्त आंकड़ों का प्रयोग करते हैं तो यह आंकड़े .... आंकड़े कहलाते हैं।

(d) द्वितीयक आंकड़ों के स्रोत .... स्रोत कहलाते हैं।

(e) मौलिक रूप में प्राथमिक स्रोत या द्वितीयक स्रोत से एकत्रित आंकड़े .... आंकड़े कहलाते हैं।

18.2 आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण

आंकड़ों को इकट्ठा करने के बाद अगले चरण में इन्हें क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत करना है। आंकड़ों को तालिका रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। इन्हें चित्र, आलेख और चार्ट द्वारा भी दर्शाया जा सकता है। आपका मुख्य उद्देश्य आंकड़ों को इस प्रकार क्रमबद्ध करना है कि संबंधित सूचनाओं का विश्लेषण कर परिणाम/ निष्कर्ष जानने में सहायता हो सके।

यदि आप अधिकतम और न्यूनतम अंक जानना चाहते हैं तो आपका आंकड़ों का अवलोकन कर अधिकतम और न्यूनतम अंक ढूंढ़ने होंगे। अवलोकन द्वारा अधिकतम तथा न्यूनतम अंक ढूंढ़ना उस ही परिस्थिति में संभव है, जब प्रेक्षणों की संख्या कम हो। प्रेक्षणों की संख्या अधिक होने पर आंकड़ों को देखकर निष्कर्ष निकालना कठिन हो जाएगा। आपको इन आंकड़ों को उचित रूप में प्रस्तुत करना होगा। आंकड़ों को प्रस्तुत करने की एक सरल विधि इन्हें आरोही क्रम या अवरोही क्रम में लिखना है। पिछले खंड में एकत्रित आंकड़ें इस प्रकार लिखे जा सकते हैं:

आरोही क्रम

20	25	25	30	30	30	38	38	45	45
49	49	57	57	57	57	65	65	72	72

या

अवरोही क्रम

72	72	65	65	57	57	57	57	49	49
45	45	38	38	30	30	30	25	25	20

अब आप आसानी से कह सकते हैं कि अधिकतम अंक 72 हैं तथा न्यूनतम अंक 20 हैं। दूसरे सभी अंक 72 और 20 के बीच में हैं।

अतः अब आप इस स्थिति में हैं कि आप अपने पिता के कुछ प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं। अब हम अन्य प्रश्नों के उत्तर देने के लिए और प्रक्रिया करते हैं।

18.3 आंकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए आवृत्ति (बारंबारता) का प्रयोग

अब आप यह जानने के इच्छुक होंगे कि कौन-सा प्रेक्षण सबसे अधिक बार है तथा कौन-सा प्रेक्षण सबसे कम। कितने विद्यार्थी उत्तीर्ण तथा कितने विद्यार्थी अनुत्तीर्ण, कितने विद्यार्थियों ने 60 प्रतिशत से अधिक अंक प्राप्त किए, कितने विद्यार्थियों ने वही अंक प्राप्त किए, इत्यादि। इन प्रश्नों के उत्तर देने के लिए आपको आंकड़ों को इस रूप में लिखना होगा:

अंक	मिलान रेखाएं	आवृत्ति
20	।	1
25	।।	2
30	।।।	3
38	।।	2
45	।।	2
49	।।	2
57	।।।।	4
65	।।	2
72	।।	2

टिप्पणी : गिनती को आसान करने के लिए हम मिलान रेखा (मिलान चिह्न) का प्रयोग करते हैं। यहां '।' अंक मिलान रेखा स्तंभ में एक विशेष प्रेक्षण की पुनरावृत्ति को दर्शाता है।

यहां पर हम पाते हैं कि

20 एक बार आता है 25, 38, 45, 49, 65 और 72 में से प्रत्येक दो-दो बार आता है।

30 तीन बार तथा 57 चार बार आता है।

ऊपर दी गई सारणी आवृत्ति बंटन सारणी कहलाती है। इसमें एक विशेष प्रेक्षण की पुनरावृत्ति को दर्शाया जाता है। एक प्रेक्षण के बार-बार आने की संख्या उसकी आवृत्ति (बारंबारता) कहलाती है।

ऊपर के उदाहरण में 4 विद्यार्थियों ने 57 अंक प्राप्त किए हैं, जबकि केवल एक विद्यार्थी ने 20 अंक प्राप्त किए हैं। अत: 57 अंक अधिकतम विद्यार्थियों ने प्राप्त किए हैं, क्योंकि इसकी आवृत्ति अधिकतम है। यहां पर उच्चतम प्राप्तांक 72 तथा न्यूनतम प्राप्तांक 20 हैं।

आंकड़ों में उच्चतम और न्यूनतम प्रेक्षणों के अंतर को विस्तार (परिसर) कहते हैं। यहां पर उच्चतम प्रेक्षण 72 और न्यूनतम प्रेक्षण 20 है, अत: विस्तार = 72 – 20 = 52 है।

देखें आपने कितना सीखा 18.2

1. निम्नलिखित आंकड़ों को आरोही क्रम में लिखिए तथा इनका विस्तार ज्ञात कीजिए:

25	33	54	85	62
27	19	54	59	48
42	37	61	74	81

2. आपके क्षेत्र में 24 परिवारों में बच्चों की संख्या निम्नलिखित है:

4	3	5	2	4	1	0	2
3	3	5	1	2	4	3	4
2	1	6	2	3	2	2	3

मिलान रेखाओं द्वारा एक आवृत्ति बंटन सारणी बनाइए। विस्तार भी ज्ञात कीजिए।

18.4 आंकड़ों का भिन्न श्रेणियों में समूहीकरण

माना कि आप यह जानना चाहते हैं कि कितने विद्यार्थी अनुत्तीर्ण हुए हैं अर्थात् कितने विद्यार्थियों ने 33 अंकों से कम प्राप्त किए हैं। यहां पर आपको आंकड़ों को दो श्रेणियों में विभक्त करना होगा। पहली, 33 और इससे अधिक (उत्तीर्ण श्रेणी) और दूसरी, 33 से कम (अनुत्तीर्ण श्रेणी)

श्रेणी	अंक	मिलान रेखाएं	आवृत्ति
अनुत्तीर्ण	20, 25, 25, 30, 30, 30	𝍸 |	6
उत्तीर्ण	38, 38, 45, 45, 49, 49, 57, 57, 57, 57, 65, 65, 72, 72	𝍸 𝍸 ||||	14

टिप्पणी : (\) मिलान रेखा स्तंभ में पांचवें प्रेक्षण को दर्शाती है। अत: चिह्न 𝍸 पांच प्रेक्षणों को दर्शाता है। इससे गिनने में सुगमता हो जाती है। इस उदाहरण में 20 में से 6 विद्यार्थी गणित में अनुत्तीर्ण हुए हैं। इसी विधि से आप उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं, जिन्होंने 50 प्रतिशत से अधिक, 60 प्रतिशत से अधिक या 50 से 60 के बीच अंक प्राप्त किए हैं।

यह सब कार्य करने पर आप पिताजी द्वारा पूछे गए सभी प्रश्नों के उत्तर देने के योग्य हो जाएंगे। क्या आप उस कार्य को याद कर सकते हैं, जो आपने आरंभ से अब तक किया है? सबसे पहले आपने गणित में व्यक्तिगत प्राप्तांक इकट्ठे किए। तब आपने उनको अपनी आवश्यकतानुसार

विभिन्न श्रेणियों में व्यक्त किया। आप यह जानकर उल्लासित होंगे कि अब तक जो भी कार्य आपने किए हैं-सांख्यिकी के अंतर्गत आते हैं।

सांख्यिकी संख्यात्मक आंकड़ों का संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण और निर्वचन के विज्ञान के रूप में परिभाषित की जाती है।

अत: इसके अंतर्गत तीन चरण आते हैं:

(i) आंकड़ों का संकलन

(ii) आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण

(iii) निष्कर्ष ज्ञात करना

सांख्यिकी व्यक्तियों/ वस्तुओं के समूह संबंधी आंकड़ों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण और निर्वचन करने की क्रमबद्ध विधि है।

अब आपके पास सांख्यिकी के बारे में कुछ ज्ञान है। अब आपके लिए अपने गांव में 1000 पुरुषों की तुलना में स्त्रियों की संख्या ज्ञात करना कोई कठिन कार्य नहीं होगा। आप निकट के गांवों की जनसंख्या संबंधी आंकड़े इकट्ठे कर सकते हैं कि कौन-सा गांव सघन आबादी वाला है और कौन-से गांव में कम आबादी है।

देखें आपने कितना सीखा 18.3

आपके 10 मित्रों द्वारा सामाजिक विज्ञान में प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं:

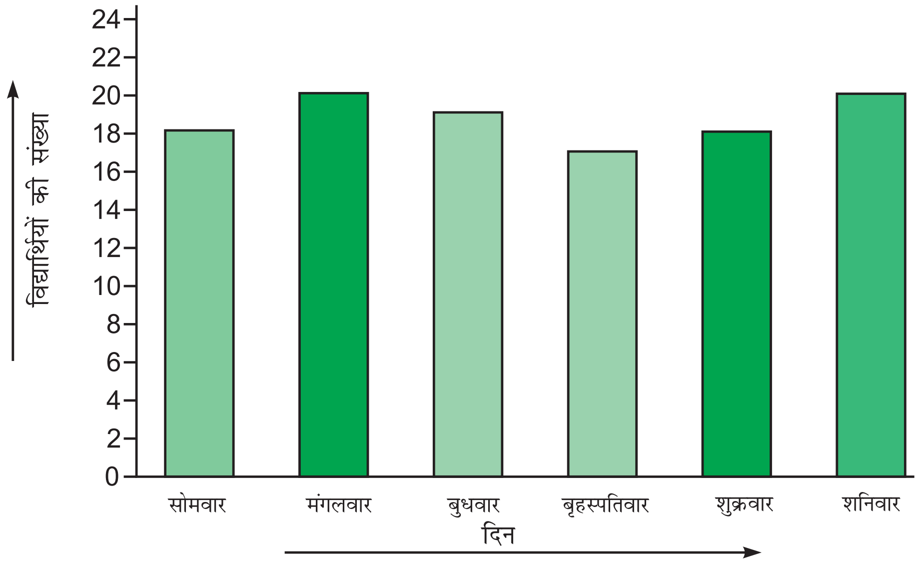
63	45	54	72	55
48	59	66	68	42

आपकी माताजी 60 से अधिक अंक प्राप्त करने वालों को 2 चॉकलेट प्रति विद्यार्थी तथा 60 से कम अंक प्राप्त करने वालों को एक चॉकलेट प्रति विद्यार्थी देना चाहती हैं। आवृत्ति बंटन सारणी द्वारा ज्ञात कीजिए कि कितने मित्रों को 2-2 चॉकलेट तथा कितनों को 1-1 चॉकलेट मिलेगी? अपनी माताजी को चॉकलेटों की संख्या बताइए, जो उन्हें आपके मित्रों में बांटने के लिए बाजार से खरीदनी पड़ेंगी।

18.5 दंड आलेख

माना आपकी कक्षा में 20 विद्यार्थी हैं। यदि आप किसी विशेष सप्ताह में 'दैनिक उपस्थिति' देखना चाहें और इन आंकड़ों का दंड आलेख खींचें, तो यह चित्र 18.1 की तरह का होगा। दंड आलेख आंकड़ों का चित्र प्रस्तुतीकरण है, जिसमें आयताकार दंड खींचे गए हैं। प्रत्येक दंड की ऊंचाई इसका संख्यात्मक मान दर्शाती है। यह आंकड़ों का शीघ्र और स्पष्ट रूप दिखाता है। माना आपके अध्यापक आपसे पूछते हैं कि

- किस दिन सभी विद्यार्थी उपस्थित थे?
- किस दिन न्यूनतम विद्यार्थी विद्यालय आए?
- किस-किस दिन समान संख्या में विद्यार्थी विद्यालय आए?
- बुधवार को कितने विद्यार्थी उपस्थित थे? आदि



चित्र 18.1

इन प्रश्नों का उत्तर देने के लिए आपको ऊपर दिया गया दंड आलेख पढ़ना होगा तथा फिर प्रश्नों के उत्तर देने होंगे।

18.6 दंड आलेख को पढ़ना

अब आप ऊपर दिए गए आलेख को इस प्रकार पढ़ेंगे:

(i) इस चार्ट में एक विशेष सप्ताह में विद्यालय में आने वाले विद्यार्थियों की दैनिक उपस्थिति की सूचना है।

(ii) क्षैतिज पंक्ति में सप्ताह के 6 दिन हैं तथा उर्ध्वाधर पंक्ति में विद्यालय में आने वाले विद्यार्थियों की संख्या है।

(iii) उर्ध्वाधर पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या को दर्शाता है।

(iv) प्रत्येक दंड केवल एक दिन को दर्शाता है।

(v) छः दिनों–सोमवार, मंगलवार, बुधवार, बृहस्पतिवार, शुक्रवार तथा शनिवार के लिए 6 दंड हैं।

(vi) प्रत्येक दंड की ऊंचाई प्रतिदिन विद्यालय आने वाले विद्यार्थियों की संख्या को दर्शाती है।

18.7 दंड आलेख की व्याख्या करना

आइए देखिए कि आप अपने अध्यापक द्वारा पूछे गए प्रश्नों के उत्तर किस प्रकार देंगे।

(i) किन दिनों में सभी विद्यार्थी उपस्थित थे? आप जानते हैं कि आपकी कक्षा में कुल 20 विद्यार्थी हैं। अब देखिए कि वह दिन कौन से हैं, जिनमें दंड उर्ध्वाधर रेखा पर 20 के निशान तक पहुंचते हैं। ऐसे दो दंड हैं–मंगलवार और शनिवार के दंड, जो 20 के निशान बिंदु तक पहुंचते हैं। अतः मंगलवार और शनिवार ऐसे दो दिन हैं, जिनमें कक्षा में सभी विद्यार्थी उपस्थित थे।

(ii) किस दिन न्यूनतम विद्यार्थी विद्यालए आए? आप सबसे छोटी लंबाई के दंड को लेते हैं? यह बृहस्पतिवार का दंड है, जिसमें 17 विद्यार्थी उपस्थित थे।

(iii) किस-किस दिन समान संख्या में विद्यार्थी विद्यालय आए? अब आप प्रत्येक दंड की ऊंचाई देखते हैं। मंगलवार और शनिवार के दंडों की ऊंचाई समान है। सोमवार और शुक्रवार के दंडों की भी ऊंचाई समान है। अत: आप यह कह सकते हैं कि सोमवार को आने वाले विद्यार्थियों को संख्या शुक्रवार को आने वाले विद्यार्थियों की संख्या के बराबर है तथा मंगलवार के विद्यार्थियों की संख्या शनिवार के विद्यार्थियों की संख्या के बराबर है।

(iv) बुधवार को कितने विद्यार्थी उपस्थित थे? बुधवार के दंड की ऊंचाई देखिए। यह उर्ध्वाधार रेखा पर 19 के चिह्न को स्पर्श करती है। अत: बुधवार को 19 विद्यार्थी उपस्थित थे।

यहां हम यह देखते हैं कि दंड आलेख सांख्यिकीय आंकड़ों को सरल और आकर्षित करने वाले रूप में प्रदर्शित करते हैं। हम दंड चार्ट को देखकर ही निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

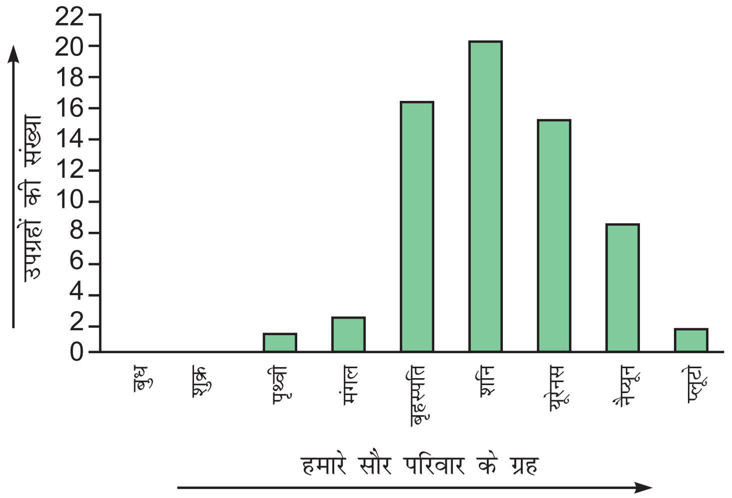
देखें आपने कितना सीखा 18.4

1. निम्नलिखित दंड आलेख को पढ़िए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

   (a) दंड आलेख क्या सूचना देता है?

   (b) उस ग्रह का नाम लीजिए, जिसमें अधिकतम संख्या में उपग्रह हैं।

   (c) उन ग्रहों के नाम लिखिए, जिसमें कोई उपग्रह नहीं है।



चित्र 18.2

18.8 दंड आलेख को खींचना

इससे पहले कि आप दंड आलेख खींचें, आपको निम्नलिखित बातों को याद रखना है:

(a) सब दंडों की चौड़ाई बराबर रखनी है।

(b) भिन्न-भिन्न दंडों के बीच बराबर-बराबर दूरी लेनी है।

(c) दंडों की ऊंचाई उन संख्याओं के अनुपात में होंगी, जिन्हें वे दर्शाते हैं।

अब आप दंड आलेख 18.1 को पढ़कर विद्यार्थियों की दैनिक उपस्थिति बता सकते हैं:

सोमवार	:	18
मंगलवार	:	20
बुधवार	:	19
बृहस्पतिवार	:	17
शुक्रवार	:	18
शनिवार	:	20

आप दंड आलेख साधारण कागज या ग्राफ शीट पर खींच सकते हैं। पहले हम यह देखेंगे कि साधारण कागज पर दंड आलेख किस प्रकार खींचा जाता है।

चरण :

(i) एक क्षैतिज रेखा तथा इसको काटती हुई एक उर्ध्वाधर रेखा खींचिए।

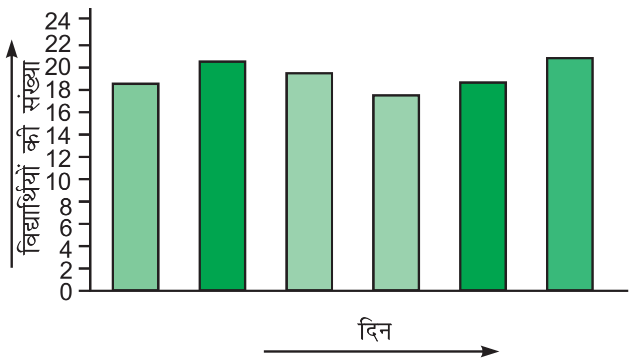
(ii) क्षैतिज रेखा पर सप्ताह के दिन और उर्ध्वाधर रेखा पर विद्यार्थियों की संख्या दिखाइए।

(iii) क्योंकि आपके पास 6 दिन हैं। आप समान चौड़ाई के 6 दंड क्षैतिज रेखा पर इस प्रकार खींचिए कि दंडों के बीच समान स्थान रहे। इन दंडों की ऊंचाइयाँ विद्यालय आने वाले विद्यार्थियों की संख्याओं के अनुसार होंगी।

(iv) उर्ध्वाधर पर उचित स्केल की आवश्यकता है, जिससे दिए गए आंकड़ों के अनुपात में प्रत्येक दंड की ऊंचाई ली जाती है। यहां आप एक विद्यार्थी के लिए 1 से.मी. दूरी उर्ध्वाधर रेखा पर ले सकते हैं। अत: सोमवार के दंड की ऊंचाई 18 से.मी. होगी। इसी प्रकार दूसरे दंडों की ऊंचाइयाँ आंकड़ों के अनुसार ले लीजिए।

(v) प्रत्येक दंड को सप्ताह के दिन के अनुसार नामांकित कर लीजिए और ऊंचाई की जांच कर लीजिए।

(vi) दंडों को आकर्षित बनाने के लिए आप इनमें भिन्न-भिन्न रंग भी भर सकते हैं। अंत में आपको निम्नलिखित आकृति प्राप्त होगी:



चित्र 18.3

देखें आपने कितना सीखा 18.5

1. निम्नलिखित सूचना आपके गांव में वाहनों की संख्या देती है:

स्कूटर	–	15
मोटर साइकिल	–	22
कार	–	12
ट्रैक्टर	–	8
ट्रक	–	10

ऊपर दिए गए आंकड़ों को दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

18.9 उचित अनुमाप/ पैमाना (Scale) की आवश्यकता

पिछले उदाहरण में आपने उर्ध्वाधर रेखा पर एक विद्यार्थी को एक से.मी. द्वारा दिखाया था। अत: कक्षा में उपस्थित एक विद्यार्थी उस दिन के दंड पर 1 से.मी. द्वारा दर्शाया जाता है, क्योंकि बृहस्पतिवार को कक्षा में 17 विद्यार्थी उपस्थित थे। अत: उस दिन के दंड की ऊंचाई 17 से. मी. है। इसी प्रकार शुक्रवार के दंड की ऊंचाई 18 से.मी. है।

यहां पर कक्षा में कुल विद्यार्थी केवल 20 थे। अत: लंबे से लंबे दंड अर्थात् मंगलवार और शनिवार के दिन के दंड की ऊंचाई 20 से.मी. है, जिसे कागज पर आसानी से दिखाया जा सकता है, परंतु ऐसी स्थिति पर विचार करो, जहां पर आप पड़ोस के 5 गांवों की जनसंख्या के आंकड़ों का संग्रह करना चाहते हों तथा उनके दंड आलेख खींचना चाहते हों। माना कि जनसंख्या निम्नलिखित है :

A	5000
B	3500
C	4500
D	2000
E	5500

अब आप आंकड़ों को छोटे कागज पर कैसे दिखाएंगे? इस समस्या को सुलझाने के लिए आपको सुविधानुसार एक मापक (अनुमाप/पैमाना) लेना होगा। आप उर्ध्वाधर रेखा पर 500 लोगों के लिए 1 से.मी. ले सकते हैं। अब गांव A के लिए आपको $5000 \div 500 = 10$ से.मी. ऊंचा दंड खींचना पड़ेगा।

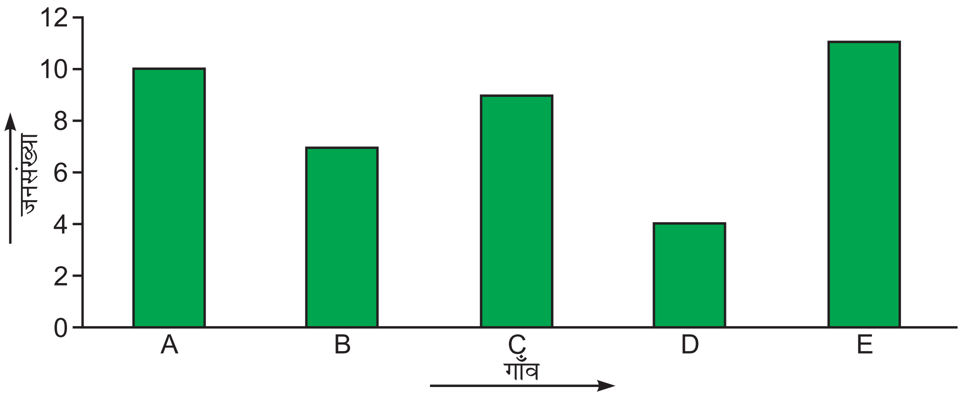
इसी प्रकार गांव B के लिए $3500 \div 500 = 7$ से.मी.

C के लिए 4500 ÷ 500 = 9 से.मी.

D के लिए 2000 ÷ 500 = 4 से.मी.

E के लिए 5500 ÷ 500 = 11 से.मी.

अब आप नए अनुमाप से दंड आलेख खींच सकते हैं, जो कि निम्नलिखित हैं:



चित्र 18.4

अब आप दंड चित्र में दर्शाए गए दंडों को पढ़ सकते हैं तथा किसी गांव की जनसंख्या, अधिकतम जनसंख्या वाला गांव, न्यूनतम जनसंख्या वाला गांव बता सकते हैं। आप दो या तीन गांवों की जनसंख्या की तुलना भी कर सकते हैं।

हमें उचित स्केल की आवश्यकता क्यों है?

(i) इससे प्रत्येक दंड को समानुपात में ऊंचाई दी जा सकती है।

(ii) यह सभी दंडों को कागज पर उपलब्ध स्थान में पूरा खींचने में सहायता करता है।

(iii) इससे अर्थ निर्वचन आसान और सरल हो जाता है।

(iv) यह दंड को आकर्षित बनाने में सहायता करता है।

देखें आपने कितना सीखा 18.6

अशोक एक परीक्षा में निम्नलिखित अंक प्राप्त करता है:

अंग्रेजी	–	70
हिंदी	–	80
विज्ञान	–	65
सामाजिक विज्ञान	–	55
गणित	–	85

इस सूचना को दंड आलेख द्वारा दर्शाइए।

18.10 ग्राफ शीट पर दंड आलेख कैसे खींचा जाता है?

आइए अब देखिए कि ग्राफ शीट पर दंड आलेख कैसे खींचे जाते हैं। माना आपके पड़ोस के गांवों में स्कूटरों की कुल संख्या इस प्रकार है:

गांव	A	=	136
	B	=	78
	C	=	120
	D	=	108
	E	=	94

आप इन आंकड़ों को दंड रूप में ग्राफ शीट पर निरूपित करना चाहते हैं। निम्नलिखित चरणों का अनुकरण कीजिए।

चरण 1. एक ग्राफ शीट लीजिए।

चरण 2. दो रेखाएं-एक क्षैतिज और दूसरी उर्ध्वाधर एक-दूसरे पर लंब खींचिए।

चरण 3. गांव को निरूपित करने के लिए क्षैतिज रेखा और स्कूटरों की संख्या को निरूपित करने के लिए उर्ध्वाधर रेखा को चुन लीजिए। क्षैतिज रेखा को x-अक्ष और उर्ध्वाधर रेखा को y-अक्ष का नाम दीजिए।

चरण 4. क्योंकि गांवों की संख्या 5 है, आपको समान चौड़ाई के 5 दंड खींचने हैं तथा इनके बीच समान जगह छोड़नी है। अत: एक बड़े भाग को दंड की चौड़ाई तथा इसी के समान भागों को दो दंडों के बीच की जगह ले लीजिए। अब x-अक्ष पर दंड की चौड़ाई और खाली जगह अंकित करने के लिए रेखाएं खींच लीजिए।

चरण 5. प्रत्येक दंड की ऊंचाई ज्ञात करने के लिए आपको एक उचित मापदंड लेना होगा। यहां एक बड़े भाग को 20 स्कूटरों के बराबर मान लीजिए। अर्थात् एक छोटे भाग को 2 स्कूटरों के बराबर मान लीजिए। अब प्रत्येक दंड की ऊंचाई ज्ञात कर लीजिए।

A गांव में 136 स्कूटर हैं। अत: A गांव के दंड की ऊंचाई = 136 ÷ 20 = 6.8। बड़े भाग। अर्थात 6 बड़े और 8 छोटे भाग।

इसी प्रकार

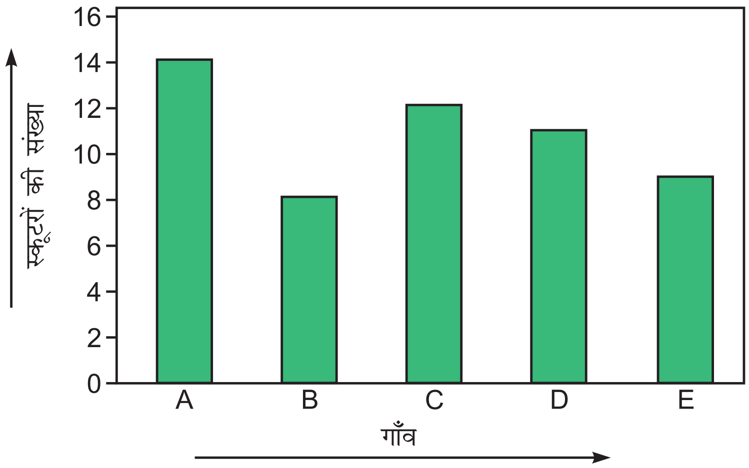
B गांव के दंड की ऊंचाई = 78 ÷ 20 = 3.9 या 3 बड़े और 9 छोटे भाग

C गांव के दंड की ऊंचाई = 120 ÷ 20 = 6 बड़े भाग

D गांव के दंड की ऊंचाई = 108 ÷ 20 = 5.4 या 5 बड़े और 4 छोटे भाग

E गांव के दंड की ऊंचाई = 94 ÷ 20 = 4.7 या 4 बड़े और 7 छोटे भाग

अब चरण 5 में ज्ञात की गई ऊंचाइयों के अनुसार दंड खींच लीजिए। आप निम्नलिखित दंड आलेख प्राप्त करेंगे:



चित्र 18.5

यहां पर निम्नलिखित महत्वपूर्ण बातें ध्यान रखनी हैं:

1. आपको दंड आलेख में स्पष्ट करना है कि यह किस बात को दर्शाने के लिए बनाया गया है।
2. दंड आलेख का अनुमाप अर्थात् 1 छोटा भाग = 2 स्कूटर (या 1 बड़ा भाग = 20 स्कूटर)
3. प्रत्येक अक्ष क्या दर्शाता है? यहां x-अक्ष गांव के नामों को और y-अक्ष स्कूटरों की संख्या को दर्शाता है।
4. प्रत्येक दंड को नामांकित कीजिए (अर्थात् गांव A, B, C, D और E)।

देखें आपने कितना सीखा 18.7

निम्नलिखित पांच ग्रहों द्वारा सौर परिवार के गिर्द घूमने में लिया गया समय इस प्रकार है:

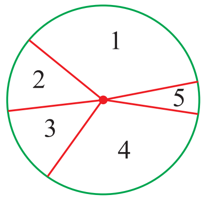
बृहस्पति	–	11.9 वर्ष
शनि	–	29.5 वर्ष
यूरेनस	–	84 वर्ष
नेपच्यून	–	165 वर्ष
प्लूटो	–	248 वर्ष

ऊपर दिए गए आंकड़ों से आलेख खींचिए।

18.11 वृत्त चित्र या पाई चार्ट

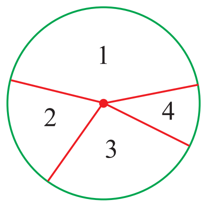
भारत के पांच राज्यों में वनों की मात्रा को वृत्ताकार रेखाचित्र द्वारा दर्शाया गया है:

यदि यह मान लिया जाए कि जिस राज्य में सबसे अधिक वन क्षेत्र है, उस राज्य में सबसे अधिक बारिश होती है तो क्या आप बता सकते हैं कि



- किस राज्य में सबसे अधिक बारिश होती है?
- किस राज्य में सबसे कम बारिश होती है?

किसी लोकसभा चुनाव में 4 उम्मीदवारों ने चुनाव लड़ा। उनके द्वारा प्राप्त वोटों को वृत्ताकार रेखाचित्र में दर्शाया गया है। वृत्ताकार रेखाचित्र में दर्शाया गया है। वृत्ताकार रेखाचित्र को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए



- किस उम्मीदवार को सबसे ज्यादा वोट मिले?
- किस उम्मीदवार को सबसे कम वोट मिले?

आप जानते हैं कि वृत्त के केंद्र पर बने सभी कोणों का योग $360°$ होता है। उम्मीदवार 1 के प्राप्त वोटों का क्षेत्र केंद्र पर सबसे बड़ा कोण बनाता है। उसी तरह उम्मीदवार 4 के वोटों द्वारा घेरा गया क्षेत्र केंद्र पर सबसे छोटा कोण बनाता है।

आइए, इसको एक उदाहरण की सहायता से समझते हैं :

उदाहरण 18.1: दिल्ली के किसी विद्यालय में कक्षा 6 से कक्षा 10 तक पढ़ने वाले विद्यार्थियों की संख्या नीचे तालिका में दी गई है:

कक्षा	6	7	8	9	10
विद्यार्थियों की संख्या	216	180	150	110	64

इनकी सहायता से वृत्ताकार रेखाचित्र बनाने के लिए हम सबसे पहले सभी कक्षाओं के विद्यार्थियों की संख्या को जोड़ते हैं और प्रत्येक कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या के लिए वृत्त के केंद्र पर बनने वाले कोण का मान ज्ञात करते हैं।

हल :

कुल विद्यार्थी $= 216 + 180 + 150 + 110 + 64 = 720$

अतः पूरा वृत्त 720 विद्यार्थियों को दर्शाता है।

$\therefore$ 720 विद्यार्थियों के लिए इस वृत्त केंद्र पर बना कोण $= 360°$

1 विद्यार्थी के लिए केंद्र पर बना कोण $= \dfrac{360°}{720}$

अतः कक्षा 6 के 216 विद्यार्थियों के लिए केंद्र पर बना कोण $= \dfrac{360°}{720} \times 216 = 108°$

कक्षा 7 के 180 विद्यार्थियों के लिए केंद्र पर बना कोण $= \dfrac{360°}{720} \times 180 = 90°$

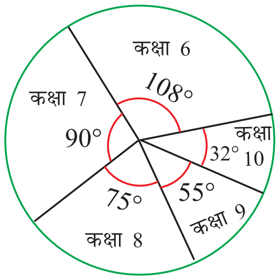
टिप्पणी

कक्षा 8 के 150 विद्यार्थियों के लिए केंद्र पर बना कोण = $\frac{360°}{720} \times 150 = 75°$

कक्षा 9 के 110 विद्यार्थियों के लिए केंद्र पर बना कोण = $\frac{360°}{720} \times 110 = 55°$

कक्षा 10 के 64 विद्यार्थियों के लिए केंद्र पर बना कोण = $\frac{360°}{720} \times 64 = 32°$

कोण ज्ञात करने के बाद किसी भी त्रिज्या का वृत्त बनाकर इसे एक-एक त्रिज्यखंड द्वारा चित्रानुसार निरूपित करेंगे।



उदाहरण 18.2: कक्षा सातवीं के 100 विद्यार्थियों की विभिन्न खेलों में रुचि (प्रतिशत में) निम्नानुसार हैं-

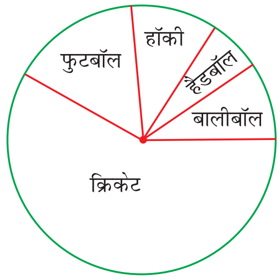
खेल का नाम	क्रिकेट	फुटबॉल	हॉकी	हैंडबॉल	वालीबॉल	कुल
खेलों में रुचि (%)	65	15	10	3	7	100

इनकी सहायता से वृत्ताकार रेखाचित्र बनाइए।

हल :

खेल का नाम	खेलों में रुचि	केंद्रीय कोण
क्रिकेट	65	$\frac{65}{100} \times 360° = 234°$
फुटबॉल	15	$\frac{15}{100} \times 360° = 54°$
हॉकी	10	$\frac{10}{100} \times 360° = 36°$
हैंडबॉल	3	$\frac{3}{100} \times 360° = 10.8°$ (लगभग 11°)
वॉलीबॉल	7	$\frac{7}{100} \times 360° = 25.2°$ (लगभग 25°)
कुल विद्यार्थियों की संख्या	100	कुल केंद्रीय कोण = 360°

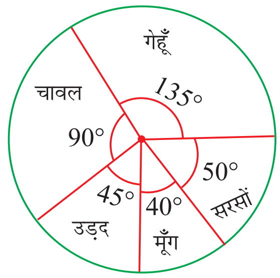
इसे वृत्ताकार रेखाचित्र द्वारा निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं:



ऊपर दिए उदाहरणों में आंकड़ों को वृत्त के माध्यम से दर्शाया गया है।

यदि आंकड़ों को वृत्त के त्रिज्यखंडों द्वारा दर्शाया गया है, तो इसे पाई चार्ट या वृत्त चित्र या वृत्ताकार रेखाचित्र कहते हैं।

उदाहरण 18.3: किसी किसान के खेत में पिछले वर्ष विभिन्न प्रकार की फसलों की पैदावार को वृत्ताकार रेखा चित्र द्वारा दर्शाया गया है। यदि कुल पैदावार 720 क्विंटल हुई हो, तो प्रत्येक फसल की पैदावार ज्ञात कीजिए।



हल : फस्ल की कुल पैदावार = 720 क्विंटल

अत: $360° = 720$ क्विंटल

$1° = \dfrac{720}{360°} \times 1°$ क्विंटल

$\therefore$ गेहूं की पैदावार $= \dfrac{720}{360°} \times 135° = 270$ क्विंटल

चावल की पैदावार $= \dfrac{720}{360°} \times 90° = 180$ क्विंटल

उड़द की पैदावार $= \dfrac{720}{360°} \times 45° = 90$ क्विंटल

मूंग की पैदावार $= \dfrac{720}{360°} \times 40° = 80$ क्विंटल

सरसों की पैदावार $= \dfrac{720}{360°} \times 50° = 100$ क्विंटल

देखें आपने कितना सीखा 18.8

1. किसी छात्रावास में, विभिन्न भाषाएं बोलने वाले विद्यार्थियों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं। इन आंकड़ों को एक पाई चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

भाषा	हिंदी	अंग्रेजी	मराठी	तमिल	बंगाली	योग
विद्यार्थियों की संख्या	40	12	9	7	4	72

2. एक परिवार की मासिक आय 12000 रुपये है। परिवार का मासिक खर्च निम्नानुसार है। दिए गए आंकड़ों से पाई चार्ट बनाइए।

मद	मकान किराया	भोजन	शिक्षा	मनोरंजन	स्वास्थ्य
खर्च की जाने वाली राशि (रुपये में)	1500	6000	1200	1800	1500

आइए दोहराएँ

- आंकड़ें एक विशेष समूह संबंधी संख्यात्मक प्रेक्षणों का संकलन है।
- आंकड़ों के समूह में प्रत्येक व्यक्तिगत संख्या एक प्रेक्षण कहलाती है।
- आपके द्वारा एकत्रित और प्रयोग करने वाले मौलिक आंकड़े प्राथमिक आंकड़े कहलाते हैं।
- वह स्रोत जहां से मौलिक आंकड़े लिए जाते हैं, प्राथमिक स्रोत कहलाता है।
- वह आंकड़े जिन्हें किसी अन्य व्यक्ति ने एकत्र किया हो तथा उनका आप प्रयोग कर रहे हैं, द्वितीयक आंकड़े कहलाते हैं।
- वह स्रोत, जहां से द्वितीयक आंकड़े लिए जाते हैं, द्वितीयक स्रोत कहलाते हैं।
- प्राथमिक या द्वितीयक स्रोतों से लिए गए मौलिक आंकड़ें अपरिष्कृत आंकड़े कहलाते हैं।
- एक बार एकत्रित किए गए आंकड़ों को सारणी, चित्र, आलेख या चार्ट द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।
- एक प्रेक्षण के पुनरावृत्ति की संख्या को आवृत्ति कहते हैं।
- एक आवृत्ति बंटन सारणी में आंकड़े प्रत्येक प्रेक्षण की आवृत्ति द्वारा दिखाए जाते हैं।
- विस्तार उच्चतम तथा न्यूनतम प्रेक्षणों का अंतर होता है।
- हम व्यक्तिगत प्रेक्षणों की आवृत्ति को अंकित करने की प्रक्रिया को सरल बनाने के लिए मिलान रेखाओं का प्रयोग करते हैं।
- परंपरागत रूप में हम चार मिलान रेखाओं को काटते हुए पांचवीं रेखा खींचकर 5 का समूह बना लेते हैं।
- सांख्यिकी एक व्यक्तियों/ वस्तुओं के समूह संबंधी संख्यात्मक आंकड़ों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण और निर्वचन की क्रमबद्ध विधि है।
- सांख्यिकी के अंतर्गत तीन चरण आते हैं

  (i) आंकड़ों का संकलन

  (ii) आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण

  (iii) निष्कर्ष ज्ञात करना

- आंकड़ों को सारणी रूप या चित्र रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।
- दंड चार्ट दंड आलेख एवं वृत्ताकार रेखा चित्र प्रस्तुतीकरण के चित्र रूप हैं।
- आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण के चित्र रूप को चित्रालेख भी कहते हैं।
- दंड आलेख में प्रत्येक दंड की चौड़ाई समान होनी चाहिए और भिन्न-भिन्न दंडों के बीच समान जगह होनी चाहिए।
- सभी दंड एक सरल रेखा को आधार मानकर खींचे जाने चाहिए, जिससे ऊंचाई देखकर निष्कर्ष निकाले जा सकें।
- दंड आलेख सादे कागज या ग्राफ शीट पर खींचे जा सकते हैं।
- दंड आलेख आसानी से शीघ्र निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं।
- प्रत्येक दंड की अनुपात के अनुसार ऊंचाई लेने के लिए उचित मापदंड की आवश्यकता होती है। इससे कागज पर उपलब्ध स्थान में पूरा दंड खींचने में भी सहायता मिलती है।
- वृत्त रेखाचित्र बनाने के लिए हम सबसे पहले सभी आंकड़ों का जोड़ करते हैं और प्रत्येक आंकड़े के लिए वृत्त के केंद्र पर बनने वाले कोण का मान ज्ञात करते हैं।

आइए अभ्यास करें

1. उचित शब्दों का प्रयोग करके रिक्त स्थानों स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (a) एक विशेष प्रेक्षण की पुनरावृत्ति की संख्या उसकी .... कहलाती है।

   (b) एक .... सारणी में आंकड़ों को उनकी उपस्थिति की संख्या के अनुसार दर्शाते हैं।

   (c) अधिकतम और न्यूनतम प्रेक्षणों का अंतर आंकड़ों का .... कहलाता है।

   (d) आंकड़ों के संकलन के बाद अगला चरण उनको क्रमबद्ध .... करना है।

2. आंकड़ों के संकलन के विभिन्न स्रोत कौन-कौन से हैं?
3. आंकड़ों के भिन्न-भिन्न प्रकार क्या हैं?
4. अपरिष्कृत आंकड़ें क्या हैं?
5. प्राथमिक आंकड़ों और द्वितीयक आंकड़ों में अंतर बताइए।
6. आंकड़ों का विस्तार क्या दर्शाता है?
7. यदि उच्चतम प्रेक्षण 80 और न्यूनतम 35 हो, तो आंकड़ों का विस्तार क्या है?
8. यदि आंकड़ों का विस्तार 42 तथा उच्चतम प्रेक्षण 68 हो, तो न्यूनतम प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।
9. आंकड़ों का न्यूनतम प्रेक्षण और विस्तार क्रमश: 27 और 35 हैं। उच्चतम मान ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

10. एक कक्षा की 15 छात्राओं की ऊंचाइयां (से.मी. में) निम्नलिखित हैं:

84	92	88	99	105
96	82	100	110	115
84	80	91	101	93

ज्ञात कीजिए:

(i) सबसे छोटी छात्रा की ऊंचाई

(ii) सबसे लंबी छात्रा की ऊंचाई

(iii) विस्तार

11. एक गांव में 20 परिवार हैं। प्रत्येक परिवार के सदस्यों की संख्या निम्नलिखित है:

5	4	6	3	7	6	4	5	8	4
6	5	3	5	6	4	7	5	9	7

एक आवृत्ति बंटन सारणी बनाइए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(a) गांव की कुल जनसंख्या कितनी है?

(b) सबसे छोटे परिवार की सदस्य संख्या क्या है?

(c) सबसे छोटे परिवारों की संख्या कितनी है?

(d) सबसे बड़े परिवार के सदस्यों की संख्या क्या है?

(e) सबसे बड़े परिवारों की संख्या कितनी है?

(f) अधिकतम पुनरावृत्ति वाले परिवार की संख्या क्या है?

(g) प्रेक्षणों का विस्तार ज्ञात कीजिए।

12. यदि आप यह जानना चाहें कि कितने लड़के और कितनी लड़कियां पाठशाला जा रहे हैं तो आप क्या करेंगे? आप कहां से आंकड़े एकत्रित करेंगे? क्या यह प्राथमिक स्रोत होगा या द्वितीयक स्रोत?

13. दंड आलेख क्या है?

14. सारणी रूप के आंकड़ों की अपेक्षा दंड आलेख से निष्कर्ष निकालना क्यों आसान है?

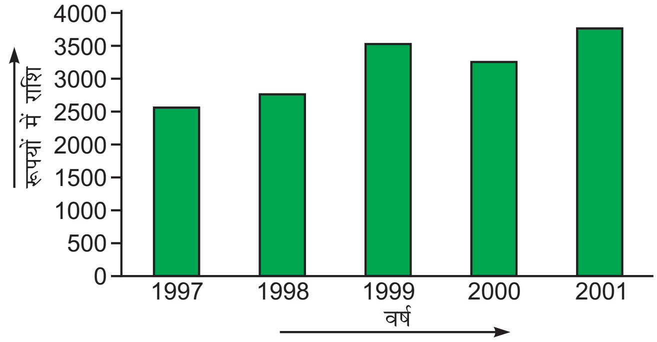
15. आंकड़ों को दंड आलेख द्वारा प्रदर्शित करने के लिए एक उचित अनुमाप की आवश्यकता क्यों होती है?

16. एक परिवार की पिछले 5 वर्षों की बचत निम्नलिखित दंड आलेख में दिखाई गई है:

इस दंड आलेख को ध्यानपूर्वक पढ़िए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(a) किस वर्ष में बचत अधिकतम थी?

(b) किस वर्ष में बचत न्यूनतम थी?

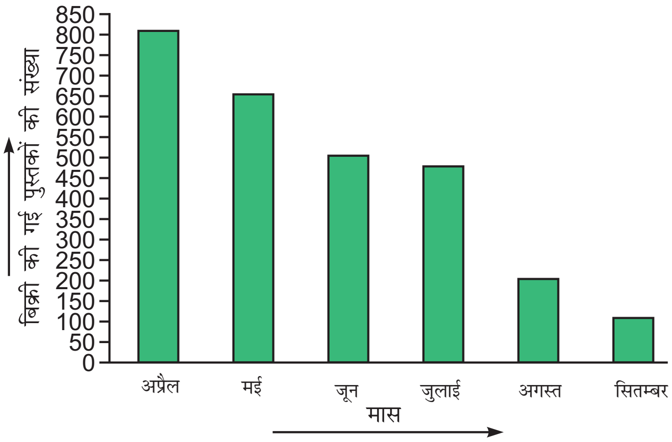


चित्र 18.6

(c) वर्ष 1999 में बचत क्या थी?

(d) किस वर्ष में बचत 2500 रुपये थी?

17. साथ दिए गए दंड आलेख को पढ़िए और प्रश्नों के उत्तर दीजिए:



चित्र 18.7

(a) किस मास में बिक्री अधिकतम थी?

(b) किस मास में बिक्री न्यूनतम थी?

(c) जून में कितनी पुस्तकें बिकीं?

(d) किस मास में 800 पुस्तकें बिकीं?

18. हमारे देश की साक्षरता दर निम्नलिखित है:

जनगणना वर्ष	साक्षरता का प्रतिशत
1951	18.33
1961	28.30
1971	34.45
1981	43.57
1991	52.21
2001	65.38

ऊपर दिए गए आंकड़ों का दंड आलेख खींचिए।

19. 2001 की जनगणना के अनुसार, भारत के कुछ राज्यों की साक्षरता दर निम्नलिखित है। इन आंकड़ों से दंड आलेख खींचिए।

राज्य	साक्षरता का प्रतिशत
केरल	90.92
आसम	64.28
आंध्र प्रदेश	61.11
उत्तर प्रदेश	57.36
बिहार	47.53
पश्चिमी बंगाल	69.22

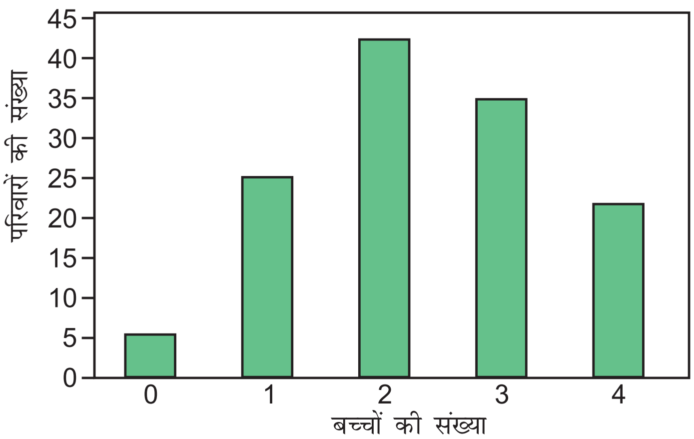
20. हमारे देश की जनसंख्या की सघनता नीचे दी गई है:

जनगणना वर्ष	सघनता
1951	117
1961	142
1971	177
1981	216
1991	267
2001	324

एक ग्राफ शीट पर इन आंकड़ों का दंड आलेख बनाइए।

21. निम्नलिखित दंड आलेख एक गांव में प्रति परिवार बच्चों की संख्या को दर्शाता है।

सामने दिए गए दंड आलेख को पढ़कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:



चित्र 18.8

(a) कितने परिवारों में बच्चों की संख्या तीन है?

(b) कितने परिवारों में कोई बच्चा नहीं है?

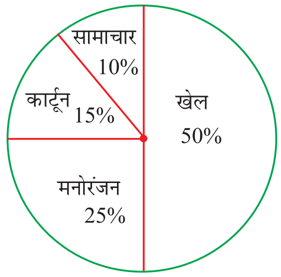
(c) दो या इससे कम बच्चे कितने परिवारों में हैं?

(d) कितने परिवारों में तीन से अधिक बच्चे हैं?

22. दिए हुए पाई चार्ट के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(a) किस प्रकार के कार्यक्रम सबसे अधिक देखे जाते हैं?

(b) किस प्रकार के कार्यक्रम सबसे कम देखे जाते हैं?



टी.वी. पर विभिन्न प्रकार के चैनलों को देखने वालों की संख्या

चित्र 18.9

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 18.1

1. (a) प्राथमिक (b) प्राथमिक (c) द्वितीयक
   (d) द्वितीयक (e) अपरिष्कृत

देखें आपने कितना सीखा 18.2

1. परिसर = 66

2.

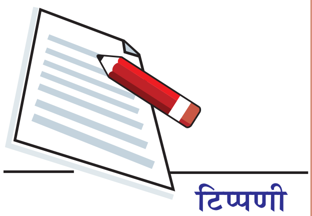
बच्चों की संख्या	मिलान रेखा	आवृत्ति
0	|	1
1	|||	3
2	~~||||~~ ||	7
3	~~||||~~ |	6
4	||||	4
5	||	2
6	|	1

देखें आपने कितना सीखा 18.3

1. चार मित्रों को 2–2

   छः मित्रों को 1–1

   आपकी माताजी को 14 चॉकलेट खरीदने पड़ेंगी।



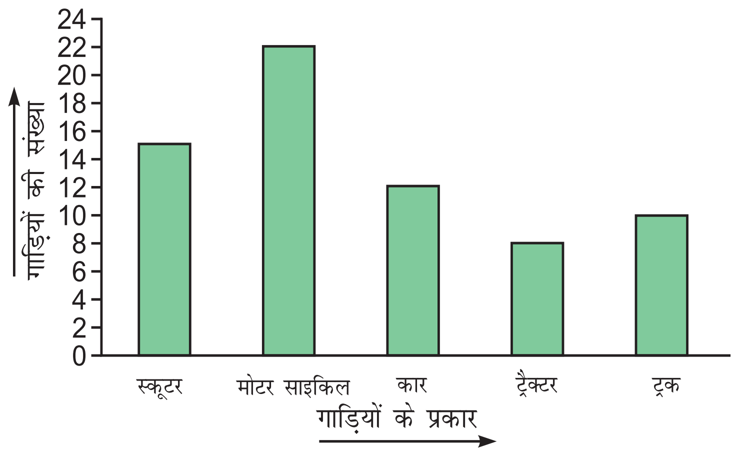
देखें आपने कितना सीखा 18.4

(a) दंड आलेख हमारे सौर परिवार के उपग्रहों की संख्या दर्शाता है।

(b) शनि

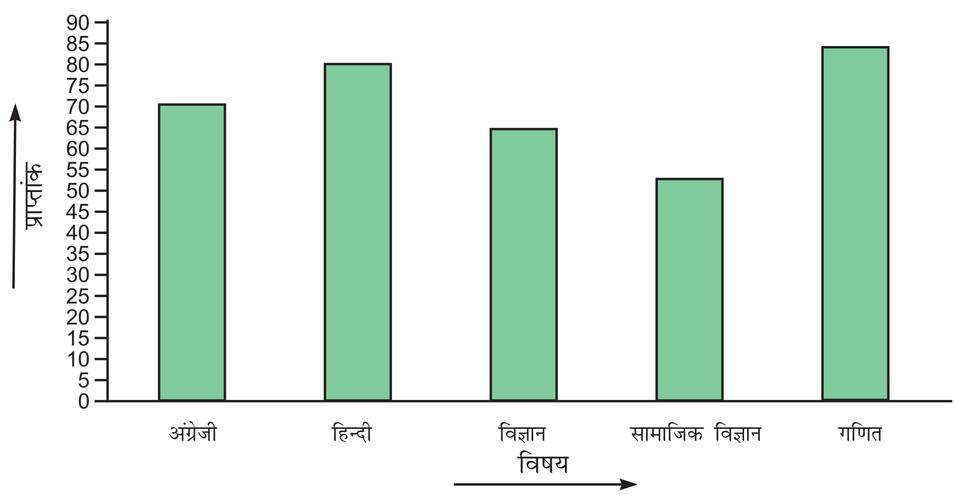
(c) बुध और शुक्र का कोई उपग्रह नहीं है।

देखें आपने कितना सीखा 18.5



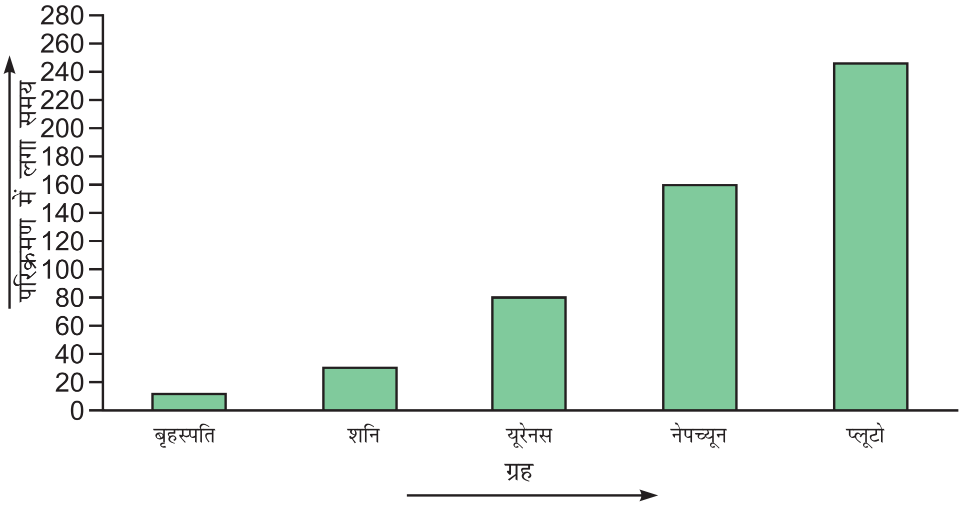
चित्र 18.10

देखें आपने कितना सीखा 18.6



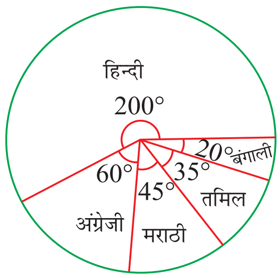
चित्र 18.11

देखें आपने कितना सीखा 18.7

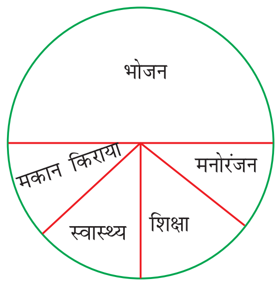


चित्र 18.12

देखें आपने कितना सीखा 18.8

1. 

चित्र 18.13

2. 

चित्र 18.14

आइए अभ्यास करें

1. (a) आवृत्ति (b) आवृत्ति बंटन (c) विस्तार (d) प्रस्तुतीकरण
2. प्राथमिक स्रोत और द्वितीयक स्रोत
3. प्राथमिक आंकड़े और द्वितीयक आंकड़े
4. प्राथमिक स्रोत या द्वितीयक स्रोत से मौलिक रूप में एकत्रित किए गए आंकड़े अपरिष्कृत आंकड़े कहलाते हैं।

5.

	प्राथमिक आंकड़े	द्वितीयक आंकड़े
(a)	अपने प्रयोग के लिए एकत्रित किए गए आंकड़े प्राथमिक आंकड़े कहलाते हैं।	किसी अन्य द्वारा एकत्रित किए तथा आप द्वारा प्रयोग किए जाने वाले आंकड़े द्वितीयक आंकड़े कहलाते हैं।
(b)	यह प्राथमिक स्रोत से एकत्रित किए जाते हैं।	यह द्वितीयक स्रोत से लिए जाते हैं।
(c)	इसमें अधिक समय लगता है।	इसमें कम समय लगता है
(d)	यह अधिक खर्चीला है।	यह कम खर्चीला है।

6. आंकड़ों का विस्तार उच्चतम और न्यूनतम प्रेक्षणों का अंतर होता है।

7. 45

8. 26

9. 62

10. (a) 80 से.मी.
    (b) 115 से.मी.
    (c) 35 से.मी.

11. (a) 109
    (b) 3
    (c) 2
    (d) 9
    (e) 1
    (f) 5
    (g) 6

12. या तो आप अपने गांव के प्रत्येक परिवार से आंकड़े इकट्ठे करेंगे या आप उन विद्यालयों से आंकड़ें लेंगे, जहां वह पढ़ रहे हैं। परिवारों से आंकड़े लेने पर वह प्राथमिक स्रोत होंगे और विद्यालयों से आंकड़े लेने पर वह द्वितीयक स्रोत होंगे।

13. दंड आलेख संख्यात्मक आंकड़ों का चित्र रूप है, जिसमें आंकड़ों को दिखाने के लिए कुछ दंड खींचे जाते हैं। सभी दंड समान चौड़ाई के होने चाहिए तथा उनके बीच एक समान स्थान होना चाहिए। प्रत्येक दंड की ऊंचाई मान को दर्शाती है।

14. दंड आलेख में आंकड़ों को भिन्न-भिन्न दंडों द्वारा दिखाया जाता है तथा प्रत्येक दंड की ऊंचाई उनके मान के समानुपात में होती है। दंडों को देखने से आंकड़ों के बारे में कुछ कहना आसान होता है, क्योंकि दंड संख्यात्मक आवृत्तियों की अपेक्षा आकर्षक होते हैं। दंडों की ऊंचाई को देखकर तुरंत ही आंकड़ों की प्रवृत्ति के बारे में जाना जा सकता है। जब सब दंडों को देखा जाता है तो आसानी से तुलना हो जाती है।

15. निम्नलिखित कारणों से उचित अनुमाप की आवश्यकता है:

    (i) प्रत्येक दंड को समानुपात में ऊंचाई देना, जिससे दिए गए स्थान में सभी दंड खींचे जा सकें।

    (ii) व्याख्या आसान हो जाती है।

    (iii) सब दंडों को आकर्षक बनाने के लिए।

16. (a) 2001

    (b) 1997

    (c) 3500

    (d) 1997

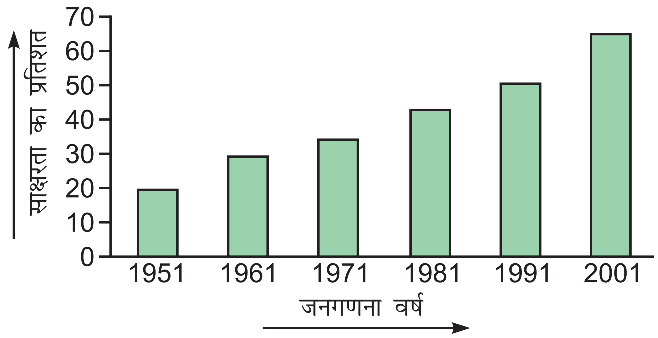
17. (a) अप्रैल

    (b) सितंबर

    (c) 500

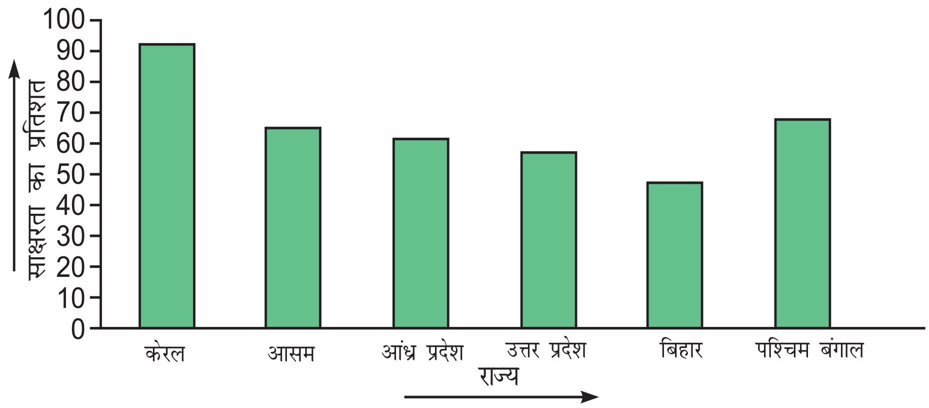
    (d) अप्रैल

18.



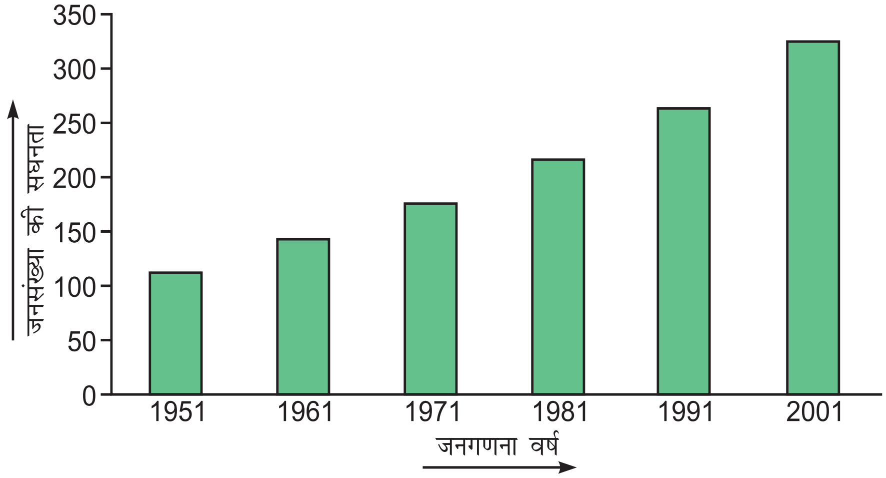
चित्र 18.15

19.



चित्र 18.16

20.



चित्र 18.17

21. (a) 35

(b) 5

(c) (5+25+42) = 72

(d) 23

22. (a) खेल

(b) समाचार

मॉड्यूल VI

वैदिक गणित

भारतवर्ष में वैदिक काल से ही गणित के पठन-पाठन की परम्परा रही है। बहुत से भारतीय गणितज्ञों ने गणित के विकास में अपना बहुमूल्य योगदान दिया है। इसी की निरन्तरता में श्री भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज भी गणित के विकास के लिए जाने जाते हैं। वे गोवर्धन मठ जगन्नाथपूरी के शंकराचार्य थे। उनकी गणित क्षेत्र में नई ऊँचाईयों को छूने वाली वैदिक गणित की पुस्तक भी उपलब्ध है। उन्होंने इस पुस्तक में 16 सूत्रों और 13 उपसूत्रों का व्याख्यान किया है। इस पुस्तक में 40 अध्याय हैं। जिनमें इन सूत्रों का प्रयोग है। उन्होंने गणित की विभिन्न समस्याओं को बहुत ही शानदार तरीके से हल किया है। वैदिक गणित के सूत्रों द्वारा गणित के हल परम्परागत तरीकों से आसान और रूचिकर हैं। लोग इनका प्रयोग करने के लिए हमेशा आकर्षित होते हैं और इनमें विशेष रूचि लेते हैं। इन सूत्रों की सहायता से एक पंक्ति में समस्या का हल तुरन्त निकाला जा सकता है। गणित के सूत्रों द्वारा गणित के हल की शुद्धता की जांच की जा सकती है। सूत्रों के अध्ययन करने से विद्यार्थियों के सृजनशीलता का विकास ऊँचे स्तर का होता है। परिणामस्वरूप विद्यार्थियों में गणित को सीखने व समझने में रूचि का जागरण होता है। अनेक विद्वानों ने राष्ट्रीय व अन्तर्राष्ट्रीय स्तर पर वैदिक गणित के सूत्रों की काफी प्रशंसा की है। इसलिए दूसरे देशों में भी वैदिक गणित का प्रचार व प्रसार काफी है। वैदिक गणित के प्रयोग से गणितीय समस्याओं का समाधान आसानी व तेजी से होता है। परिणामस्वरूप यह रूचिकर व प्रेरणादायक बन जाता है।

19

वैदिक गणित से परिचय

भारत की प्राचीन शिक्षा पद्धति में गणित में प्रश्नों का हल शीघ्र अतिशीघ्र दिया जाता था। परन्तु कुछ समय से यह अनुभव किया जा रहा है कि विद्यार्थियों द्वारा गणित की समस्याओं का हल करने में काफी समस्या आ रही है। लेकिन वैदिक गणित का जब से परिचय हुआ है तभी से विद्यार्थियों में गणित में रूचि बढ़ने लगी है और गणित के प्रश्न हल करने में भी कम समस्याओं का सामना करना पड़ता है।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- गणित के अध्ययन-अध्यापन में रूचि जागृत करना।
- प्रतियोगी परीक्षाओं में आत्मविश्वास का स्तर बढ़ाना।
- गणित के अनेक समस्याओं को कम समय में हल करके समय बचाना।
- विद्यार्थियों के मस्तिष्क का इस स्तर तक विकसित करना कि वह अपने सामान्य जीवन में गणित के विभिन्न समस्याओं को हल करके अपना जीवन सफल कर सके।
- वैदिक गणित के सूत्रों द्वारा विभिन्न गणितीय समस्याओं को हल करके तर्क शक्ति को बढ़ाना।
- वैदिक गणित सूत्रों द्वारा विभिन्न समस्याओं को हल करते हुए आत्मविश्वास बढ़ाना।
- गणित के विकास के अध्ययन में रूचि बढ़ाना।
- विद्यार्थियों में गणना की गति और शुद्धता बढ़ाना।
- विद्यार्थियों की स्मरण शक्ति को तेज करना।

19.1 वैदिक गणित के पठन-पाठन का महत्व

- वैदिक गणित प्रतियोगी परीक्षाओं के लिए वरदान है।
- वैदिक गणित आधुनिक गणित को रूचिकर बनाने में बहुत ही लाभदायक है।
- वैदिक गणित के सूत्रों द्वारा विद्यार्थियों द्वारा गणना की क्षमता बढ़ाई जा सकती है।

- विद्यार्थियों की तार्किक शक्ति का विकास होता है।
- कम समय में अधिक प्रश्नों को हल किया जा सकता है।
- वैदिक गणित के सूत्रों द्वारा उत्तर एक ही पंक्ति में तुरन्त दिया जा सकता है।

19.2 वैदिक गणित के सूत्र व उनका अर्थ

स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी ने 16 सूत्र व इनके अर्थ का वर्णन निम्न प्रकार से किया है।

(i)	एकाधिकेन पूर्वेण	–	पहले से एक अधिक
(ii)	निखिलं नवतश्चरमं दशतः	–	सभी को नौ में से अंतिम दस में से
(iii)	उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्	–	सीधे तिरछे या तिर्यक दोनों प्रकार से
(iv)	परावर्त्य योजयेत्	–	पक्षान्तण कर उपयोग करें
(v)	शून्य साम्य समुच्चये	–	समुच्चय समान होने पर शून्य होता है
(vi)	आनुरूप्येण शून्यमन्यत्	–	अनुरूपता होने पर दूसरा शून्य होता है
(vii)	संकलन व्यवकलनभ्याम्	–	जोड़कर व घटाकर
(viii)	पूरणापूरणाभ्याम्	–	अपूर्ण को पूर्ण कर
(ix)	चलनकलनाभ्याम	–	चलन-कलन के द्वारा
(x)	यावदूनम्	–	जितना कम है अर्थात विचलन
(xi)	व्यष्टिसमष्टि	–	एक को पूर्ण और पूर्ण को एक मानते हुए
(xii)	शेषाष्यकेन चरमेण	–	अंतिम अंक से अवशेष को
(xiii)	सोपान्त्यद्वयमन्त्यम्	–	अंतिम और उपन्तिम का दुगुना
(xiv)	एकन्यूनेन पूर्वेण	–	पहले से एक कम के द्वारा
(xv)	गुणित समुच्चयः	–	गुणितों का समुच्चय
(xvi)	गुणक समुच्चयः	–	गुणकों का समुच्चय

19.3 विनकुलम अंकों का प्रयोग

वैदिक गणित में विनकुलम अंकों का प्रयोग प्रचुर मात्रा में होता है। आओ हम वैदिक गणित में विनकुलम संख्याएं और इनके प्रयोग के बारे में सीखते हैं।

19.3.1 विनकुलम की परिभाषा

विनकुलम संख्याएँ वे संख्याएँ होती है जिनमें ऋणात्मक व धनात्मक दोनों तरह के अंक होते हैं। $1\overline{2}$ इस संख्या में 1 धनात्मक और 2 ऋणात्मक है। विनकुलम के प्रयोग से संख्याओं की संक्रियाएँ आसान हो जाती हैं।

19.4 विनकुलम संक्रियाएँ

विनकुलम संख्याओं को वैदिक गणित के कई सूत्रों में प्रयोग किया जाता है। इसका मुख्य लाभ यह है कि यह बड़े अंकों को छोटे अंकों में बदलने में सहायता करता है। परन्तु अंकों का बदलाव इस प्रकार होता है कि संख्या के मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

उदाहरण : $9 = 10 - 1 = 1\bar{1}$

उपरोक्त उदाहरण में 9 को $1\bar{1}$ (एक रेखांक एक बोलते हैं) लिखा जा सकता है।

विनकुलम की इस संक्रिया में वैदिक गणित सूत्र-निखलं नवतश्चमरमं दशतः का प्रयोग होता है जिसका अर्थ है सभी को नौ में से तथा अंतिम दस में से। निम्न संख्याओं को हम विनकुलम संख्याओं में बदल सकते हैं।

$$8 = 10 - 2 = 1\bar{2}$$

$$99 = 100 - 1 = 10\bar{1}$$

$$996 = 1000 - 4 = 100\bar{4}$$

$$987 = 1000 - 13 = 10\overline{13}$$

19.5 जोड़

वैदिक गणित में कई प्रकार से जोड़ किया जा सकता है। अब तक हम सर्वप्रथम इकाई के अंकों को जोड़ते हैं फिर दहाई के अंकों को जोड़ते हैं। उसके बाद आगे के अंकों को जोड़ते हैं। परन्तु वैदिक गणित के सूत्रों से हम बाएँ ओर से जोड़ की संक्रिया आरम्भ कर सकते हैं। जोड़ की इस विधि को वैदिक गणित में शून्यांत सूत्र से कर सकते हैं जिससे विद्यार्थी आसानी से बिना कागज पेन्सिल की सहायता मौखिक उत्तर निकाल सकते हैं।

19.6 सूत्र-शून्यांत

सूत्र-शून्यांत वो संख्याएं जिनके अंत में शून्य हो शून्यांत संख्याएं कहलाती है उदाहरण 10, 100, 1000, ... 2000, 3000। इस सूत्र के अनुसार इन संख्याओं की सहायता से जोड़ बहुत ही आसान और रूचिकर बनाया जा सकता है।

उदाहरण 19.1 : जोड़े $76 + 87$

हल :

$$\begin{array}{r} 7\ 6 \\ 8\ 7 \\ \hline 1\ 6\ 3 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1: $7 + 8 = 15$ (15 को अगले चरण के लिए 150 समझें)

चरण 2 : $150 + 6 + 7 = 163$

उदाहरण 19.2 : जोड़े $68 + 53 + 85 + 36$

हल :

$$\begin{array}{r} 6\ 8 \\ 5\ 3 \\ 8\ 5 \\ 3\ 6 \\ \hline 2\ 4\ 2 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1: $6 + 5 + 8 + 3 = 22$ (22 को अगले चरण के लिए 220 समझें अर्थात एक चरण पूरा होने पर एक शून्य लगाये)

चरण 2 : $220 + 8 + 3 + 5 + 6 = 242$

उदाहरण 19.3 : जोड़े $532 + 674 + 378$

हल :

$$\begin{array}{r} 5\ 3\ 2 \\ 6\ 7\ 4 \\ 3\ 7\ 8 \\ \hline 1\ 5\ 8\ 4 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1: $5 + 6 + 3 = 14 \Longrightarrow 140$

चरण 2: $140 + 3 + 7 + 7 = 157 \Longrightarrow 1570$

चरण 3: $1570 + 2 + 4 + 8 = 1584$

उदाहरण 19.4 : जोड़े $632 + 621 + 712 + 821$

हल :

$$\begin{array}{r} 6\ 3\ 2 \\ 6\ 2\ 1 \\ 7\ 1\ 2 \\ 8\ 2\ 1 \\ \hline 2\ 7\ 8\ 6 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1: $6 + 6 + 7 + 8 = 27 \Longrightarrow 270$

चरण 2: $270 + 3 + 2 + 1 + 2 = 278 \Longrightarrow 2780$

चरण 3: $2780 + 2 + 1 + 2 + 1 = 2786$

उदाहरण 19.5 : जोड़े $937 + 32 + 61 + 635$

हल :

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7 \\ 3\ 2 \\ 6\ 1 \\ 6\ 3\ 5 \\ \hline 1\ 6\ 6\ 5 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1: $9 + 6 = 15 \Longrightarrow 150$

चरण 2: $150 + 3 + 3 + 6 + 3 = 165 \Longrightarrow 1650$

चरण 3: $1650 + 7 + 2 + 1 + 5 = 1665$

देखें आपने कितना सीखा 19.1

1. $47 + 21 + 63$
2. $54 + 72 + 91$
3. $65 + 62 + 73$
4. $79 + 86 + 14$
5. $173 + 241 + 203$
6. $776 + 234 + 541$
7. $642 + 607 + 242$
8. $553 + 345 + 244$
9. $643 + 672 + 923$
10. $675 + 723 + 644$
11. $475 + 67 + 72 + 265$
12. $675 + 76 + 34 + 892$

19.7 जोड़ (सूत्र-निखलं)

सूत्र-निखलं के प्रयोग द्वारा जोड़ करना बहुत ही आसान है। इस सूत्र के प्रयोग द्वारा आधार/उपाधार के आस-पास की संख्याओं का जोड़ आसानी से किया जा सकता है। आधार 10, 100, 1000, ... और उपाधार 20, 30, 40, 200, 300, 400, ... 2000, 3000, 4000 ... को लिया जाता है।

उदाहरण 19.6 : जोड़े 427 + 99

हल : $427 + (100 - 1)$

$= (427 + 100) - 1$

$= 526$ (किसी संख्या में 10, 100, 1000 .. जोड़ना बहुत ही आसान होता है)

उदाहरण 19.7 : जोड़े 725 + 597

हल : $725 + (600 - 3)$

$= (725 + 600) - 3$

$= 1325 - 3$

$= 1322$

उदाहरण 19.8 : जोड़े 4462 + 2005

हल : $4462 + (2000 + 5)$

$= (4462 + 2000) + 5$

$= 6467$

उदाहरण 19.9 : जोड़े 7237 + 3999

हल : $7237 + (4000 - 1)$

$= (7237 + 4000) - 1$

$= 11237 - 1$

$= 11236$

उदाहरण 19.10 : जोड़े 6546 + 5998 + 7002

हल : $6546 + (6000 - 2) + (7000 + 2)$

$= (6546 + 6000 + 7000) - 2 + 2$

$= 19546$

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 19.2

1.	67 + 95	2.	72 + 98
3.	65 + 93	4.	665 + 997
5.	720 + 901	6.	925 + 996
7.	1772 + 9005	8.	6725 + 4995
9.	6761 + 1011	10.	7256 + 7999 + 1002
11.	67650 + 998 + 997 + 1005	12.	4970 + 5998 + 6001 + 7997

18.8 घटाव

घटाने की संक्रिया में वैदिक गणित सूत्र-शून्यांत का प्रयोग विद्यार्थियों के लिए गणित में रूचि जागृत करने के लिए बहुत ही आवश्यक है। सूत्र शून्यांत के द्वारा घटाने की संक्रिया बाएँ ओर से कर सकते हैं जिससे यह क्रिया बहुत ही रूचिकर और आसान हो जाती है।

उदाहरण 19.11 : 67 में से 28 घटाएँ।

हल : $67 - 28 = 39$

चरण 1: $6 - 2 = 4 \Rightarrow 40$

चरण 2: $40 + 7 - 8 = 39$

उदाहरण 19.12 : 624 में से 278 घटाएँ।

हल : $624 - 278 = 346$

चरण 1: $6 - 2 = 4 \Rightarrow 40$

चरण 2: $40 + 2 - 7 = 35 \Rightarrow 350$

चरण 3: $350 + 4 - 8 = 346$

उदाहरण 19.13 : 8278 में से 3487 घटाएँ।

हल : $8278 - 3487 = 4791$

चरण 1: $8 - 3 = 5 \Rightarrow 50$

चरण 2: $50 + 2 - 4 = 48 \Rightarrow 480$

चरण 3: $480 + 7 - 8 = 479 \Rightarrow 4790$

चरण 4: $4790 + 8 - 7 = 4791$

उदाहरण 19.14 : 6421 में से 971 घटाएँ।

हल : $6421 - 971 = 5450$

चरण 1: $64 - 9 = 55 \Rightarrow 550$

चरण 2: $550 + 2 - 7 = 545 \Rightarrow 5450$

चरण 3: $5450 + 1 - 1 = 5450$

उदाहरण 19.15 : 72735 में से 627 घटाएँ।

हल : $72735 - 627 = 72108$

चरण 1: $727 - 6 = 721 \Rightarrow 7210$

चरण 2: $7210 + 3 - 2 = 7211 \Rightarrow 72110$

चरण 3: $72110 + 5 - 7 = 72108$

देखें आपने कितना सीखा 19.3

1.	6470 – 2315	2.	4135 – 1756
3.	6443 – 2172	4.	7485 – 2579
5.	6477 – 3288	6.	2177 – 1288
7.	7667 – 2778	8.	2765 – 1765
9.	6465 – 2578	10.	8875 – 1987
11.	7263 – 2465	12.	9265 – 6727

19.9 मिश्रित संक्रियाओं पर आधारित गणना (जोड़ व घटाव)

आज का समय प्रतियोगिता का युग है। प्रतियोगिता के इस युग में प्रतियोगी परीक्षाओं में मिश्रित गणनाओं का समावेश काफी है। मिश्रित गणनाओं को हल करने में काफी समय लगता है। परन्तु वैदिक गणित की सहायता से मिश्रित गणना का हल बहुत ही आसान व रूचिपूर्वक है। मिश्रित गणना वैदिक गणित विधि से मौखिक व एक ही पंक्ति में कर सकते हैं।

उदाहरण 19.16 : यदि हमारे पास ऐसी संख्या है जेसे $65 + 32 + 72 - 93 + 42 - 34$ हम साधारणतया पहले जोड़ की संख्याओं का अलग लिखकर हल करते है फिर घटा की संख्याओं को अलग लिखकर जोड़ते हैं। उसे पश्चात दोनों परिणामों को घटाते हैं। परन्तु वैदिक गणित के सूत्रों के अनुप्रयोग की सहायता से हम इनका उत्तर मौखिक और एक पंक्ति में हल करके निकाल सकते हैं।

हल :

$$\begin{array}{r} +65 \\ +32 \\ +72 \\ -93 \\ +42 \\ -34 \\ \hline 84 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1: $6 + 3 + 7 - 9 + 4 - 3 = 8 \Rightarrow 80$

चरण 2: $80 + 5 + 2 + 2 - 3 + 2 - 4 = 84$

उदाहरण 19.17 : हल करें : $66 + 47 - 76 + 24 - 54 + 26$

हल :

$$\begin{array}{r} +66 \\ +47 \\ -76 \\ +24 \\ -54 \\ +26 \\ \hline 33 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1: $6 + 4 - 7 + 2 - 5 + 2 = 2 \Rightarrow 20$

चरण 2: $20 + 6 + 7 - 6 + 4 - 4 + 6 = 33$

उदाहरण 19.18 : हल करें : $421 + 512 - 417 + 612 + 723 - 156$

हल :

$$\begin{array}{r} +421 \\ +512 \\ -417 \\ +612 \\ +723 \\ -156 \\ \hline 1695 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1: $4 + 5 - 4 + 6 + 7 - 1 = 17 \Rightarrow 170$

चरण 2: $170 + 2 + 1 - 1 + 1 + 2 - 5 = 170 \Rightarrow 1700$

चरण 3: $1700 + 1 + 2 - 7 + 2 + 3 - 6 = 1695$

देखें आपने कितना सीखा 19.4

1. $437 + 635 - 125$
2. $534 - 235 + 432 - 137$
3. $567 + 135 - 211 + 145$
4. $625 + 137 - 457 + 512$
5. $789 - 378 + 512 - 415$
6. $882 + 172 - 765 + 121$
7. $627 + 672 - 475$
8. $997 - 788 + 122 - 234$
9. $675 + 321 - 375$
10. $887 - 765 + 432 - 317$
11. $794 - 219 + 425 - 317$
12. $763 + 411 - 255 - 307$

आइए दोहराएं

- विनकुलम के प्रयोग से संख्याओं की संक्रियाएं आसान हो जाती है।
- शून्यांत सूत्र का प्रयोग जोड़ने को आसान बनाने में किया जाता है। $932 + 764 + 378$ इसमें 532 एवं 378 को पहले जोड़ते हैं।

- सूत्र शून्यांत के द्वारा बाई ओर से घटाना सम्भव है।
- मिश्रित संक्रियाओं पर आधारित गणना करना।

आइए अभ्यास करें

1. वैदिक गणित के लेखक का नाम लिखें।
2. वैदिक गणित में सूत्रों और उपसूत्रों की संख्या लिखें।
3. वैदिक गणित अधिगम के उद्देश्य लिखें।
4. वैदिक गणित के पठन-पाठन के चार महत्व लिखें।
5. वैदिक गणित के चार सूत्रों के नाम और उनके अर्थ लिखे।
6. विनकुलम संख्या की परिभाषा लिखें।
7. विनकुलम में किस सूत्र का प्रयोग किया जाता है।
8. विनकुलम संक्रियाएं किस प्रकार हमारे लिए सहायक है?
9. निम्न संख्याओं को विनकुलम संख्याएं बनाईए।

   (i) 97 (ii) 96 (iii) 996

   (iv) 989 (v) 987 (vi) 994

   (vii) 979 (viii) 888 (ix) 999

10. सूत्र-शून्यांत का प्रयोग करते हुए निम्न संख्याओं को जोड़ें।

    (i) 67 + 23 + 52 (ii) 172 + 421 + 321

    (iii) 462 + 502 + 722 (iv) 822 + 611 + 322

    (v) 1421 + 3121 + 1452 (vi) 731 + 514 + 302

    (vii) 741 + 517 + 602

11. सूत्र-निखलं का प्रयोग करके निम्न संख्याओं को जोड़ें।

    (i) 522 + 998 (ii) 725 + 997

    (iii) 441 + 990 (iv) 627 + 985

    (v) 423 + 799 (vi) 627 + 498

    (vii) 848 + 397 (viii) 720 + 195

12. सूत्र-शून्यांत का प्रयोग करते हुए निम्न संख्याओं को घटाएं।

(i)	721 – 455	(ii)	672 – 344
(iii)	674 – 277	(iv)	872 – 285
(v)	723 – 478	(vi)	811 – 177
(vii)	625 – 256	(viii)	428 – 179

13. मिश्रित संख्याओं को हल करें।

(i)	247 + 301 – 241	(ii)	47 + 51 – 24 + 52
(iii)	32 + 42 – 22 + 45 – 30	(iv)	241 + 522 – 102
(v)	672 – 172 + 525 – 122	(vi)	422 + 133 – 211
(vii)	4221 + 5112 – 7112	(viii)	5147 – 1241 + 2134

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 19.1

1. 131	2. 217	3. 200	4. 179
5. 617	6. 1551	7. 1491	8. 1142
9. 2238	10. 2042	11. 879	12. 1677

देखें आपने कितना सीखा 19.2

1. 162	2. 170	3. 158	4. 1662
5. 1621	6. 1991	7. 10777	8. 11720
9. 7772	10. 16257	11. 70650	12. 24966

देखें आपने कितना सीखा 19.3

1. 4155	2. 2379	3. 4271	4. 4906
5. 3189	6. 889	7. 4889	8. 1000
9. 3887	10. 6888	11. 4798	12. 2538

देखें आपने कितना सीखा 19.4

1. 947	2. 594	3. 636	4. 817
5. 508	6. 410	7. 824	8. 97
9. 621	10. 237	11. 683	12. 612

आइए अभ्यास करें

1. जगतगुरू स्वामी भारती कृष्णतीर्थ जी
2. 16 सूत्र, 13 उपसूत्र
3. (i) गणित के पठन पाठन में रूचि जागृत करना।
   (ii) गणित के अनेक प्रश्नों को कम समय में हल करके समय बचाना।
   (iii) गणित के विकास के अध्ययन में रूचि बढ़ाना।
   (iv) विद्यार्थियों में गणना की शुद्धता बढ़ाना।
4. (i) प्रतियोगी परीक्षाओं के लिए वरदान है।
   (ii) गणित को सरल बनाने में उपयोगी है।
   (iii) विद्यार्थियों की गणना क्षमता के बढ़ाने में सहयोगी है।
   (iv) एक ही पंक्ति में प्रश्न का हल सम्भव है।
5. (i) एकाधिकेन पूर्वेण – पहले से एक अधिक।
   (ii) निखिलं नवतश्चरमं दशत: – सभी को नौ में से तथा अन्तिम 10 में से।
   (iii) उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् – सीधे तिरछे या तिर्यक दोनों प्रकार से।
   (iv) परावर्त्य योजयेत – पक्षातरण कर उपयोग करें।
6. विनकुलम संख्याएँ वे संख्याएँ होती है जिसमें ऋणात्मक व धनात्मक दोनों प्रकार के अंक होते हैं।
7. विनकुलम में सूत्र निखिलं नवतश्चमरमं दशत: का प्रयोग किया जाता है।
8. विनकुलम बड़े अंकों को छोटे अंकों में बदलने की संक्रिया है, जिससे गणना करना बहुत ही सरल हो जाता है।
9. (i) $10\bar{3}$ (ii) $10\bar{4}$ (iii) $100\bar{4}$
   (iv) $100\bar{1}\bar{1}$ (v) $10\bar{1}\bar{3}$ (vi) $100\bar{6}$
   (vii) $10\bar{2}\bar{1}$ (viii) $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ (ix) $100\bar{1}$

10.	(i)	142	(ii)	914	(iii)	1686
	(iv)	1755	(v)	5994	(vi)	1547
	(vii)	1860				
11.	(i)	1520	(ii)	1722	(iii)	1431
	(iv)	1612	(v)	1222	(vi)	1125
	(vii)	1245	(viii)	915		
12.	(i)	266	(ii)	328	(iii)	397
	(iv)	587	(v)	245	(vi)	634
	(vii)	369	(viii)	249		
13.	(i)	307	(ii)	126	(iii)	67
	(iv)	661	(v)	903	(vi)	344
	(vii)	2221	(viii)	6040		

20

वैदिक गणित के अनुप्रयोग

पिछले अध्याय में हम वैदिक गणित के सूत्रों से परिचित हुए हैं। वैदिक गणित के सूत्र गणित के प्रश्नों को हल करने में तो सहायक है ही इसके अतिरिक्त हमारी जीवन पद्धति का भी हिस्सा है। वैदिक गणित के सूत्रों द्वारा हम जीवन के अनेक क्षेत्रों में इनका प्रयोग कर जीवन को सरल व तनावमुक्त कर सकते हैं। इन सूत्रों की सहायता से अंकगणित, बीजगणित व रेखागणित के प्रश्नों को आसानी से हल कर सकते हैं। हम इस पाठ में अंकगणित में गुणा, वर्ग, घन, वर्गमूल व घनमूल करना सीखेंगे।

इस पाठ से आप सीखेंगे :

- दो संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करना
- वर्ग ज्ञात करना
- वर्गमूल ज्ञात करना
- घनमूल ज्ञात करना

20.1 गुणा की प्रथम विधि-सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण

सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण का अर्थ है पहले से एक कम करना। गुणा की इस विधि द्वारा सभी संख्याओं की गुणा नहीं की जा सकती। इस सूत्र के माध्यम से उन्हीं संख्याओं की गुणा की जा सकती है जिसमें एक संख्या के सभी अंक 9 हों। दूसरी संख्या में कोई भी अंक हो सकते हैं।

उदाहरण 20.1: हल करें 524×999

उपर्युक्त संख्याओं में से दूसरी संख्या 9 अंकों वाली है। दूसरी संख्या में 5, 2, 4 अंक है। अतः इस समस्या को निम्न प्रकार से हल करेंगे।

हल : 524×999

बांया पक्ष $524 - 1 = 523$

दांया पक्ष : $999 - 523 = 476$

उत्तर : 523476

चरण 1 : उत्तर के दो भाग होंगे बांया पक्ष और दांया पक्ष। बांया पक्ष में 9 अंकों वाली से दूसरी संख्या में से 1 घटाएंगे।

चरण 2 : बांया पक्ष के परिणाम को 999 अंकों वाली संख्या में से घटाएंगे।

उदाहरण 20.2: हल करें 6251×9999

हल : बांया पक्ष $= 6251 - 1 = 6250$

दांया पक्ष $= 9999 - 6250$

$= 3749$

उत्तर $= 62503749$

उदाहरण 20.3: हल करें 372×9999

हल : बांया पक्ष $= 372 - 1 = 371$

दांया पक्ष $= 9999 - 371$

$= 9628$

उत्तर $= 3719628$

उदाहरण 20.4: हल करें 67246×9999

हल : बांया पक्ष $= 67246 - 1 = 67245$

दांया पक्ष = 9 अंकों वाली संख्या में 9 अंकों की संख्या बांया पक्ष के परिणाम की संख्या से कम है। 9999 में से 67245 नहीं घटा सकते।

अत: इसको निम्न प्रकार से हल करेंगे।

$$\begin{array}{r} 672459999 \\ -67245 \\ \hline = 672392754 \end{array}$$

उत्तर $= 672392754$

चरण 1 : बांया पक्ष के परिणाम के दाई ओर 9 अंकों वाली संख्या लिखेंगे।

चरण 2 : प्राप्त संख्या में से बांया पक्ष वाली ही संख्या घटाएंगे।

उदाहरण 20.5: हल करें 56729×999

हल : बांया पक्ष $= 56729 - 1 = 56728$

$$\begin{array}{r} 56728999 \\ -56728 \\ \hline = 56672271 \end{array}$$

उत्तर $= 56672271$

देखें आपने कितना सीखा 20.1

1. 4567×9999
2. 7250×9999
3. 7219×9999
4. 5672×99999
5. 70421×999999
6. 61234×999999
7. 6241×999
8. 42157×9999
9. 64725×99999
10. 346721×999999
11. 50721×999
12. 74252×999999

20.2 गुणा-सूत्र एकाधिकेन तथा अन्त्योर्दशकेऽपि

गुणा के इस सूत्र-एकाधिकेन तथा अन्तोर्दशकेऽपि द्वारा भी गुणा बहुत आसान हो जाती है। इस सूत्र के द्वारा गुणा ऐसी संख्याओं की होती है जिसमें इकाई के अंकों का योग 10 हो और शेष अंक दोनों संख्याओं के समान हों। उदाहरण के तौर पर 56×54 इस संख्या में 6 और 4 का जोड़ 10 है तथा शेष अंक दोनों में समान हैं।

उदाहरण 20.6: हल करें 53×57

हल : 53×57

$= (5+1) \times 5 / 3 \times 7$

$= 6 \times 5 / 3 \times 7$

$= 3021$ **उत्तर**

चरण 1 : इकाई के अंकों की गुणा करे $3 \times 7 = 21$

चरण 2 : शेष अंक में 1 जोड़ कर उसी संख्या से गुणा कर दी जाती है। $(5 + 1) \times 5 = 30$

उदाहरण 20.7: हल करें 74×76

हल : $= (7+1) \times 7 / 4 \times 6$

$= 8 \times 7 / 4 \times 6$

$= 5624$ **उत्तर**

उदाहरण 20.8: हल करें 102×108

हल : $= (10+1) \times 10 / 2 \times 8$

$= 11 \times 10 / 2 \times 8$

$= 11016$ **उत्तर**

उदाहरण 20.9: हल करें 291×299

हल : $= (29+1) \times 29 / 1 \times 9$

$= 30 \times 29 / 1 \times 9$

$= 87009$ **उत्तर**

नोट : $1 \times 9 = 9$, यहाँ गुणा करे तो एक ही अंक आया है। परन्तु दायाँ पक्ष दो अंकों का आना आवश्यक है। अत: दांयी ओर 09 संख्या होगी।

उदाहरण 20.10: हल करें 992×998

हल : $= (99+1) \times 99 / 2 \times 8$

$= 100 \times 99 / 2 \times 8$

$= 990016$ **उत्तर**

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 20.2

1. 47×43	2. 34×36
3. 64×66	4. 104×106
5. 203×207	6. 193×197
7. 294×296	8. 404×406
9. 502×508	10. 392×398
11. 491×499	12. 595×595

20.3 गुणा-सूत्र निखिलम् (आधार, उपाधार)

गुणा सूत्र-निखिलम द्वारा बहुत सरल व आसान हैं इस सूत्र के द्वारा उन्हीं संख्याओं की गुणा कर सकते हैं जो संख्याएं आधार या उपाधार के आस-पास हो। दस या दस की घात से प्राप्त संख्या को आधार कहते हैं जैसे 10, 100, 1000 ... आदि। उपाधार वे संख्याएं हैं जो आधार के गुणज या गुणनखंड कहलाती हैं। जैसे 20, 30, ... 200, 300 ... 2000, 3000 ... आदि। इस सूत्र में विचलन का भी प्रयोग किया जाता है। विचलन वह संख्या है जिसको संख्या में से आधार/उपाधार को घटाकर प्राप्त किया जा सकता है। जैसे 107 में विचलन 7 है। 1015 में विचलन 15 है। 993 में विचलन 7 है।

उदाहरण 20.11: हल करें 104×109

हल :

संख्याएं	विचलन
104	4
$\times$ 109	9
104 + 9	/ 4×9

चरण 1 : सर्वप्रथम दोनों संख्याओं का विचलन लिखा जाता है।

चरण 2 : विचलनों की गुणा की जाती है। यह उत्तर का दांया पक्ष है। $4 \times 9 = 36$

चरण 3 : पहली संख्या + दूसरी संख्या का विचलन यह उत्तर का बांया पक्ष $104 + 9 = 113$

नोट : उत्तर के दांयी ओर के गुणा में आधार के शून्यों की संख्या के बराबर अंक रखे जाते हैं। यदि विचलनों के गुणनफल के अंक आधार के शून्यों की संख्या से कम हो तो इस गुणनफल के बांयी ओर पर्याप्त संख्या में शून्य लगाते हैं।

उदाहरण 20.12: हल करें 102×124

हल :

संख्याएं	विचलन
124	24
$\times$ 102	2
102 + 24	/ 24×2
12648	

टिप्पणी

उदाहरण 20.13: हल करें 97×95

हल :

संख्याएं	विचलन
97	–3
× 95	– 5
(97 – 5)	/ (–3) × (–5)

= 92/15

= 9215

चरण 1 : संख्या आधार से छोटी है। अतः विचलन (–) में होगा। दोनों ऋणात्मक विचलन का गुणन + में होगा।

चरण 2 : पहली संख्या – दूसरी संख्या का विचलन अर्थात $97 - 5 = 92$

उदाहरण 20.14: हल करें 985×975

हल :

संख्याएं	विचलन
985	–15
× 975	– 25
(985 – 25)	/ (–15) × (–25)

= 960/375

= 960375

देखें आपने कितना सीखा 20.3

1.	106 × 111	2.	107 × 112	3.	103 × 114
4.	106 × 115	5.	107 × 109	6.	95 × 97
7.	98 × 95	8.	92 × 97	9.	98 × 85

20.4 सूत्र-निखिलम एवं आनुरूप्येण (उपाधार)

निखिलम् सूत्र से उपाधार के निकट की संख्याओं का गुणनफल किया जाता है। उपाधार 20, 30, 40 ... 200, 300, 400 ... आदि हो सकते हैं।

उदाहरण 20.15: हल करें 602×606

हल :

संख्याएं	विचलन
602	2
× 606	6
6(602 + 6)	/ 2 × 6

= 6(608)/12

= 364812

चरण 1 : विचलनों की गुणा, दांया पक्ष $2 \times 6 = 12$

चरण 2 : (पहली संख्या + दूसरी विचलन) × 6 क्योंकि उपाधार आधार का 6 का गुणज है। इसलिए बाएं पक्ष की ओर 6 से गुणा करेंगे।

उदाहरण 20.16: हल करें 705×712

हल :

संख्याएं	विचलन
705	5
$\times$ 712	12
$7(705+12)$	/ 5×12

$= 7(717)/60$

$= 501960$

देखें आपने कितना सीखा 20.4

1.	405×408	2.	225×203	3.	508×512
4.	709×706	5.	909×911	6.	765×701
7.	806×809	8.	807×812	9.	606×615

20.5 गुणा-सूत्र-उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

सूत्र उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् द्वारा गुणन सार्वभौमिक है क्योंकि इस सूत्र द्वारा हम किसी भी संख्या को किसी संख्या से गुणन कर सकते हैं।

20.5.1 दो अंकों वाली संख्याओं का गुणन

दो अंकों वाली संख्या का गुणन तीन चरणों में होगा। यह गुणन प्रक्रिया निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 20.17: हल करें 43×57

हल :

4	3	
$\times$ 5	7	
4×5	4×7 + 5×3	3×7

2451 उत्तर

चरण 1 : इकाई के अंकों के गुणा $3 \times 7 = 21$ परन्तु इस परिणाम में एक ही अंक लेंगे। शेष हासिल बन जाएंगे।

चरण 2 : तिर्यक गुणा करेंगे और परिणाम को जोड़ देंगे $28 + 15 = 43$

$$\begin{array}{ccc} 4 & & 3 \\ & \times & \\ 5 & & 7 \end{array}$$

चरण 3 : 4×5 करेंगे $= 20$

चरण 4 : 20 में 4 जोड़ेंगे $= 24$

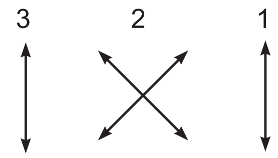
उदाहरण 20.18: हल करें 32×43

हल :

3	2	
$\times 4$	3	
3×4	3×3 + 4×2	2×3

$= 1376$ उत्तर

नोट : गुणन के चरण निम्न प्रकार से रहेंगे



उदाहरण 20.19: हल करें 65×41

हल :

6	5	
$\times 4$	1	
6×4	6×1 + 5×4	5×1

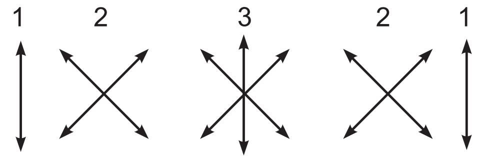
$= 2665$ उत्तर

देखें आपने कितना सीखा 20.5

1. 43×52	2. 31×63	3. 32×55
4. 24×36	5. 55×62	6. 92×93
7. 34×43	8. 44×65	9. 73×46

20.6 गुणा तीन अंकों की सूत्र-उर्ध्वतिर्यग्भ्याम

तीन अंकों की गुणा भी इस सूत्र द्वारा बहुत ही आसानी से कर सकते हैं। इस प्रकार की गुणा में कोई भी संख्या ले सकते हैं। यह गुणा 5 चरणों में होगी जिसके चित्र निम्न प्रकार से दिए गए हैं।



उदाहरण 20.20: हल करें 431×250

हल :

		4	3	1
		$\times 2$	5	0
4×2	4×5 $+$ 2×3	4×0 $+$ 2×1 $+$ 3×5	3×0 $+$ 5×1	1×0

$= 107750$ **उत्तर**

चरण 1 : $1 \times 0 = 0$

चरण 2 : $3 \times 0 + 5 \times 1 = 5$

चरण 3 : $4 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 5 = 17$

चरण 4 : $4 \times 5 + 2 \times 3 = 26$

चरण 5 : $4 \times 2 = 8$

उदाहरण 20.21: हल करें 509×432

हल :

	5	0	9	
	$\times 4$	3	2	
5×4	5×3 $+$ 4×0	5×2 $+$ 4×9 $+$ 0×3	0×2 $+$ 3×9	9×2

$= 219888$ **उत्तर**

देखें आपने कितना सीखा 20.6

1. 161×432
2. 121×922
3. 363×432
4. 162×454
5. 155×335
6. 193×412
7. 413×305
8. 512×205
9. 601×712
10. 625×441
11. 325×433
12. 423×812

20.7 वर्ग ज्ञात करना– सूत्र यावदूनं

वर्ग करने का अर्थ है संख्या को स्वयं से ही गुणा करना। गुणा की तरह वर्ग करना भी वैदिक गणित सूत्रों द्वारा बहुत ही आसान है। वर्ग को भी एक पंक्ति में किया जा सकता है। सूत्र–यावदूनं

द्वारा वर्ग करना सबसे सरल है। इस सूत्र के अनुसार हम उन्हीं संख्याओं का वर्ग कर सकते है जो संख्याएं आधार के नजदीक है आधार का अर्थ है 10 और 10 के घात वाली संख्याएं अर्थात 10, 100, 1000 ... आइए कुछ संख्याओं का वर्ग करते हैं।

उदाहरण 20.22: हल करें $(107)^2$

हल : $107 + 7 / 7^2$

$= 11449$

चरण 1 : दायां पक्ष में विचलन का वर्ग करते हैं अर्थात $(7)^2 = 49$ आधार 100 है तो दायां पक्ष में 2 अंक होंगे। कम होने पर शून्य लगाकर दो अंकों को पूरा किया जाएगा। यदि 2 अंकों से ज्यादा अंक है तो हासिल के रूप में शेष अंकों का प्रयोग होगा।

चरण 2 : बांए पक्ष में संख्या में विचलन जोड़ दिया जाता है।

उदाहरण 20.23: हल करें $(109)^2$

हल : $109 + 9 / 9^2$

$= 11881$

उदाहरण 20.24: हल करें $(113)^2$

हल : $113 + 13 / 13^2$

$= 126\ {}_{1}69$

$= 12769$

नोट : दांए पक्ष में 13 का वर्ग करने पर तीन अंकों की संख्या प्राप्त होती है आधार 100 है अतः अंकों को (69) ही दायां पक्ष में रखना है। तीसरा अंक 1 हासिल के लिए बांए पक्ष में जोड़ दिया जाता है।

उदाहरण 20.25: हल करें $(98)^2$

हल : $98 - 2 / (2)^2$

$= 9604$

नोट : संख्या 98 आधार से 2 कम है अतः विचलन – 2 रहेगा। दांये पक्ष में (– 2) का वर्ग करने पर 4 प्राप्त होता है परन्तु 100 का आधार होने के कारण 2 अंकों की आवश्यकता है अतः 4 के बाएं ओर 0 का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 20.26: हल करें $(96)^2$

हल : $96 - 4 / (4)^2$

$= 9616$

उदाहरण 20.27: हल करें $(89)^2$

हल : $89 - 11 / 11^2$

$= 79\ {}_{1}21$

$= 7921$

उदाहरण 20.28: हल करें $(1021)^2$

हल : $1021 + 21 / (21^2)$

$= 1042441$

नोट : इस संख्या में 1000 का आधार है अत: दायां पक्ष में 3 अंकों में परिणाम लिखा जाता है।

उदाहरण 20.29: हल करें $(1008)^2$

हल : $1008 + 8 / (8^2)$

$= 1016064$

नोट : दायां पक्ष में 8 का वर्ग करने पर दो अंक मिलते हैं। अत: तीसरे अंक के लिए दांये पक्ष में शून्य का प्रयोग किया गया।

उदाहरण 20.30: हल करें $(1050)^2$

हल : $1050 + 50 / 50^2$

$= 1100\,_{2}500$

$= 1102500$

नोट : 50 का वर्ग करने पर चार अंक प्राप्त होते है अत: 1000 आधार होने के कारण 3 अंक लिखे जाते हैं। चौथा अंक (2) बांये पक्ष में जोड़ा जाएगा।

उदाहरण 20.31: हल करें $(985)^2$

हल : $985 - 15 / 15^2$

$= 970225$

देखें आपने कितना सीखा 20.7

1. 105^2	2. 106^2	3. 94^2
4. 97^2	5. 85^2	6. 112^2
7. 1012^2	8. 1015^2	9. 1021^2
10. 975^2	11. 979^2	12. 984^2

20.8 वर्ग सूत्र-द्वन्द्वयोग द्वारा

वर्ग सूत्र-द्वन्द्वयोग द्वारा किसी भी संख्या का वर्ग कर सकते हैं। वर्ग एक पंक्ति में किया जा सकता है।

उदाहरण 20.32: हल करें $(42)^2$

हल : $(42)^2 = 4^2 \;\Big|\; 4 \times 2 \times 2 \;\Big|\; 2^2$

$= 17\,_{1}64$

$= 1764$

चरण 1 : इकाई का अंक का वर्ग $(2)^2 = 4$

चरण 2 : दोनों अंकों को आपस में गुणा करके दुगुना करना $(4 \times 2) \times 2 = 16$

चरण 3 : दहाई के अंक का वर्ग $(4)^2 = 16$

नोट : चरण 1 व चरण 2 के परिणामों में एक-एक का प्रयोग करेंगे। शेष अंकों को हासिल के लिए प्रयोग करेंगे।

टिप्पणी

उदाहरण 20.33: हल करें $(64)^2$

हल : $(64)^2 = \quad 6^2 \; \big| \; 6 \times 4 \times 2 \; \big| \quad 4^2$

$= 40_4\, 9_1\, 6$

उदाहरण 20.34: हल करें $(91)^2$

हल : $(91)^2 = \quad 9^2 \; \big| \; 9 \times 1 \times 2 \; \big| \quad 1^2$

$= 82\ {}_1 81$

उदाहरण 20.35: हल करें $(83)^2$

हल : $(83)^2 = \quad 8^2 \; \big| \; 8 \times 3 \times 2 \; \big| \quad 3^2$

$= 68_4\, 89$

देखें आपने कितना सीखा 20.8

1. 31^2	2. 64^2	3. 72^2
4. 62^2	5. 43^2	6. 92^2
7. 84^2	8. 67^2	9. 42^2
10. 54^2	11. 46^2	12. 71^2

20.9 घन सूत्र यावदूनं द्वारा

सूत्र यावदूनं द्वारा आधार के आस-पास वाली संख्याओं को लिया जाता है।

उदाहरण 20.36: हल करें $(98)^3$

हल : $(98)^2 = 98 - 2 \times 2 \; \big| \; 3 \times (2)^2 \; \big| \; (-2)^3$

$= 9412(\overline{08})$

$= 941200 - 08$

$= 941192$

चरण 1 : दाई ओर से विचलन का घन करेंगे $(-2)^3 = \overline{08})$ (08 के ऊपर – का चिह्न है।

चरण 2 : विचलन का वर्ग $\times 3$ करेंगे $2^2 \times 3 = 12$

चरण 3 : सख्या में विचलन का दुगुना घटाना

उदाहरण 20.37: हल करें $(105)^3$

हल : $(105)^3 = \; 105 + 2 \times 5 \; \big| \; 3 \times 5^2 \; \big| \; 5^3$

$= 11575\ {}_1 25$

$= 1157625$

उदाहरण 20.38: हल करें $(106)^3$

हल : $(106)^3 = \; 106 + 2\times 6 \;\big|\; 3\times 6^2 \;\big|\; 6^3$

$= 119_1\ 08_2\ 16$

$= 1191016$

देखें आपने कितना सीखा 20.9

1. 104^3
2. 95^3
3. 106^3
4. 99^3
5. 101^3
6. 98^3
7. 97^3
8. 105^3

2010 घन सूत्र आनुरूप्येण द्वारा

सूत्र-आनुरूप्येण द्वारा घन किसी भी दो अंकों वाली संख्या का किया जा सकता है।

उदाहरण 20.39: हल करें $(41)^3$

हल : $(41)^3 = \; 4^3 \;\big|\; 3\times 4^2\times 1^2 \;\big|\; 3\times 4\times 1^2 \;\big|\; 1^3$

$64 \;\big|\; {}_4 8 \;\big|\; {}_1 2 \;\big|\; 1$

$= 68921$

चरण 1 : बांए पक्ष में इकाई का घन जैसे $1^3 = 1$

चरण 2 : बांए से अगले पक्ष में $3\times$ दहाई $\times$ इकाई -2

$3\times 4\times 1^2 = 12$

चरण 3 : $3\times$ (इकाई)^2 $\times$ इकाई

चरण 4 : दहाई का घन $4^3 = 64$

देखें आपने कितना सीखा 20.10

1. 53^3
2. 45^3
3. 31^3
4. 42^3
5. 61^3
6. 91^3
7. 31^3
8. 22^3

20.11 वर्गमूल सूत्र-विलोकनम् द्वारा

4 अंकों की संख्याओं का विलोकनम के द्वारा पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल निकाला जात सकता है।

20.11.1 निम्न सारणी में अंकों के वर्ग का इकाई अंक दिए गए हैं।

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9
अंकों के वर्ग का इकाई अंक	1	4	9	6	5	6	9	4	1

टिप्पणी

20.11.2 पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल के इकाई का अंक

संख्या का चरमांक	वर्गमूल का चरमांक
1	1 या 9
4	2 या 8
5	5
6	4 या 6
9	3 या 7

उदाहरण 20.10: पूर्ण वर्ग संख्या 5184 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल : $\overline{51}\,\overline{84}$

$\sqrt{5184} = 72$

चरण 1 : पहले 2-2 अंकों के जोड़ बनाए।

चरण 2 : दूसरा जोड़ा 51 है। अत: $7^2 < 51$ है। अत: दहाई का अंक 7 होगा।

चरण 3 : अन्तिम अंक 4 है अत: वर्गमूल का अन्तिम अंक 2 या 8 होगा।

चरण 4 : अन्तिम अंक 2 या 8 का चुनाव के लिए हम निम्न क्रिया करेंगे।

दहाई अंक का वर्ग + दहाई का अंक

$7^2 + 7 = 56$

$51 < 56$

अत: 2 और 8 में से 2 अंक स्वीकृत होगा।

उदाहरण 20.41: पूर्ण संख्या 7569 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल : $\sqrt{\overline{75}\,\overline{69}}$

दहाई अंक $= 8^2 < 75$

इकाई का अंक 9 है अत: वर्गमूल का चरमांक 3, 7 हो सकते हैं।

इकाई के अंक का चयन करने के लिए $8^2 + 8 = 72$ करेंगे।

$75 > 72$ अत: इकाई का अंक 3, 7 में से बड़ा अंक 7 लिया जाएगा।

$\sqrt{7569} = 87$

देखें आपने कितना सीखा 20.11

1. 841
2. 361
3. 529
4. 9409
5. 8281
6. 3249

टिप्पणी

20.12 घनमूल छः या छः से कम अंकों का

छः या छः से कम अंकों का घनमूल सूत्र-विलोकनम द्वारा निकाला जा सकता है।

20.12.1 निम्न सारणी द्वारा इकाई का अंक निकाला जा सकता है

संख्या का चरमांक	घनमूल का चरमांक
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

उदाहरण 20.42: 17576 का घनमूल ज्ञात करें।

हल : $\overline{17}\;\overline{576}$

चरण 1 : दांयी ओर से 3-3 अंकों के समूहों का बनाया जाएगा। अन्त में यदि 2 अंक बचते हैं तो 2 अंकों का समूह माना जाएगा।

चरण 2 : चरमांक 6 है। अतः घनमूल का चरमांक भी सारणी के अनुसार 6 होगा।

चरण 3 : दूसरा समूह 17 है। घनमूल का दहाई अंक निकालने के लिए निम्नविधि अपनाएंगे 2^3 का मान 17 से कम है या $2^3 < 17 < 3^3$। अतः दहाई का अंक 2 हुआ।

चरण 4 : दहाई अंक $= 2$

इकाई अंक $= 6$

घनमूल $= 26$

उदाहरण 20.43: 29791 का घनमूल ज्ञात करें।

हल : $\overline{29}\;\overline{791}$

चरण 1 : अंतिम अंक 1 है अतः घनमूल में इकाई का अंक 1 होगा।

चरण 2 : 3^3 का मान 29 से कम है या $3^3 < 29 < 4^3$ अतः दहाई का अंक 3 होगा।

चरण 3 : इकाई का अंक $= 1$

दहाई का अंक $= 3$

चरण 4 : घनमूल $= 31$

देखें आपने कितना सीखा 20.12

1. 85184	2. 729	3. 5832
4. 2197	5. 1728	6. 42875
7. 3375	8. 1331	9. 9261

आइए दोहराएं

- सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण का अर्थ है पहले से एक कम करना।
- गुणा सूत्र एकाधिकेन तथा अन्त्योर्दशकेऽपि द्वारा गुणा ऐसी संख्याओं की होती है जिसमें इकाई के अंकों का योग 10 हो और दोनों संख्याओं में शेष स्थानों के अंक समान हों।
- गुणा सूत्र निखिलम द्वारा उन्हीं संख्याओं का गुणा कर सकते हैं जो संख्याएं आधार या उपाधार के आस-पास हो।
- छः या छः से कम अंकों का घनमूल सूत्र विलोकनम् द्वारा निकाला जा सकता है।

आइए अभ्यास करें

1. एकन्यूनेन सूत्र द्वारा गुणन करें।

   (i) 756×999 (ii) 6545×9999 (iii) 7246×999999

   (iv) 6754×999 (v) 8754×99 (vi) 96761×999999

2. सूत्र एकाधिकेन तथा अन्त्योर्दशकेऽपि द्वारा गुणन करें।

   (i) 42×48 (ii) 292×298 (iii) 394×396

   (iv) 992×998 (v) 704×706 (vi) 601×609

3. सूत्र उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् द्वारा गुणन करें।

   (i) 47×32 (ii) 54×33 (iii) 241×232

   (iv) 731×651 (v) 702×721 (vi) 612×723

4. सूत्र-यावदूनं द्वारा वर्ग करें।

   (i) 107^2 (ii) 91^2 (iii) 88^2

   (iv) 105^2 (v) 988^2 (vi) 977^2

5. सूत्र-यावदूनं द्वारा घन करें।

   (i) 102^3 (ii) 97^3 (iii) 96^3

   (iv) 104^3 (v) 106^3 (vi) 92^3

टिप्पणी

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 20.1

1. 45665433	2. 72492750	3. 72182781
4. 567194328	5. 70420929579	6. 61233938766
7. 6234759	8. 421527843	9. 6472435275
10. 346720653279	11. 50670279	12. 74251925748

देखें आपने कितना सीखा 20.2

1. 2021	2. 1224	3. 4224
4. 11024	5. 42021	6. 38021
7. 87024	8. 164024	9. 255016
10. 156016	11. 245009	12. 354025

देखें आपने कितना सीखा 20.3

1. 11766	2. 11984	3. 11742
4. 12190	5. 11663	6. 9215
7. 9310	8. 8924	9. 8330

देखें आपने कितना सीखा 20.4

1. 165240	2. 45675	3. 260096
4. 500554	5. 828099	6. 536265
7. 652054	8. 655284	9. 372690

देखें आपने कितना सीखा 20.5

1. 2236	2. 1953	3. 1760
4. 864	5. 3410	6. 8556
7. 1462	8. 2860	9. 3358

देखें आपने कितना सीखा 20.6

1. 69552	2. 111562	3. 156816
4. 73548	5. 51925	6. 79516
7. 125965	8. 104960	9. 427912
10. 275625	11. 140725	12. 343476

देखें आपने कितना सीखा 20.7

1. 11025	2. 11236	3. 8836
4. 9409	5. 7225	6. 12544
7. 1024144	8. 1030225	9. 1042441
10. 950625	11. 958441	12. 968256

देखें आपने कितना सीखा 20.8

1. 961	2. 4096	3. 5184
4. 3844	5. 1849	6. 8464
7. 7056	8. 4489	9. 1764
10. 2916	11. 2116	12. 5041

देखें आपने कितना सीखा 20.9

1. 1124864	2. 857375	3. 1191016
4. 970299	5. 1030301	6. 941192
7. 912673	8. 1157625	

देखें आपने कितना सीखा 20.10

1. 178877	2. 91125	3. 29791
4. 74088	5. 226981	6. 753571
7. 29791	8. 10648	

देखें आपने कितना सीखा 20.11

1. 29	2. 19	3. 23
4. 97	5. 91	6. 57

देखें आपने कितना सीखा 20.12

1. 44	2. 9	3. 18
4. 13	5. 12	6. 35
7. 15	8. 11	9. 21

आइए अभ्यास करें

1.	(i)	755244	(ii)	65443455	(iii)	7245992754
	(iv)	6747246	(v)	866646	(vi)	96760903239
2.	(i)	2016	(ii)	87016	(iii)	156024
	(iv)	99016	(v)	497024	(vi)	366009
3.	(i)	1504	(ii)	1782	(iii)	55912
	(iv)	475881	(v)	506142	(vi)	442476
4.	(i)	11449	(ii)	8281	(iii)	7744
	(iv)	11025	(v)	976144	(vi)	954579
5.	(i)	1061208	(ii)	912673	(iii)	884736
	(iv)	1124864	(v)	1191016	(vi)	778688

मुक्त बेसिक शिक्षा (प्रौढ़) स्तर 'ग' पर गणित (C-103) की पाठ्यचर्या

1. मूलाधार

मुक्त बेसिक शिक्षा (प्रौढ़) स्तर 'ग' पर अधिगम हेतु गणित एक महत्वपूर्ण विषय है। गणित की अवधारणाओं के माध्यम से शिक्षार्थी वास्तविक जीवन की परिचित एवं अपरिचित परिस्थितियों में समस्या समाधान की योग्यता अर्जित करता है। परिशुद्धता, विवेकपूर्ण एवं विश्लेषणात्मक चिंतन जैसी योग्यताओं के विकास में गणित का विशेष योगदान है। इस स्तर पर शिक्षार्थी में गणित सीखने से परिस्थितियों एवं दैनिक जीवन की वास्तविक परिस्थितियों से जोड़ने के लिए विभिन्न अवधारणाओं के समझ के आधार पर अधिक बल मिलता है। इस स्तर पर शिक्षार्थी में समस्या समाधान के कौशलों, अभिवृत्ति एवं कार्यशैली विकसित करने का प्रयास है। शिक्षार्थी से अपेक्षित है कि उसने 'क' व 'ख' स्तर की मुक्त बेसिक शिक्षा प्राप्त कर गणित का आधार सुदृढ़ किया है। वर्तमान स्तर पर पाठचर्या का निर्माण इस उद्देश्य से किया गया है कि शिक्षार्थी दैनिक जीवन की विभिन्न गतिविधियों में गणित की प्रासंगिकता से अवगत हो सके। वैदिक गणित सीखने से शिक्षार्थी की गणना कौशल का विकास होता है। इससे गणित के अध्ययन में रूचि उत्पन्न होती है।

2. उद्देश्य

मुक्त बेसिक शिक्षा (प्रौढ़) स्तर 'ग' पर गणित पढ़ाने का मुख्य उद्देश्य शिक्षाथियों को निम्न कार्यों में सक्षम बनाना है :

- आधारभूत अवधारणाओं, तथ्यों, प्रतीकों तथा प्रक्रियाओं का समझना तथा संबंधित ज्ञान अर्जित करना।
- अपने परिवेश में परिमापन अनुभवों को अर्जित करना तथा उनका संबंध अपने जीवन में स्थापित करना।
- शाब्दिक समस्याओं का गणितीय रूप में हल प्रस्तुत करना।
- गणित एवं इसकी अवधारणाओं के प्रयोग के प्रति सकारात्मक अभिवृत्ति का विकास करना।
- गणित के व्यापक प्रयोग की सराहना करने के अवसर प्रदान करना।
- वैदिक गणित द्वारा कम समय में ज्यादा प्रश्नों को हल कर गणना कौशल में दक्षता प्राप्त करना।
- शिक्षार्थी को आगामी स्तर की माध्यमिक परीक्षा के आधार को सुदृढ़ करना।
- शिक्षार्थी में आत्मविश्वास जागृत करना जिससे अगली पीढ़ी की शिक्षा में वह सकारात्मक भूमिका अदा कर सके।

3. पाठ्यचर्या संरचना

मुक्त बेसिक शिक्षा (प्रौढ़) स्तर 'ग' पर गणित की पाठ्यचर्या को छः मॉड्यूलों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक मॉड्यूल को विभिन्न पाठों में विभाजित किया गया है। पाठों की संख्या, सुझावित अध्ययन अवधि तथा प्रत्येक इकाई के लिए निर्धारित अंक इस प्रकार है :

मुक्त बेसिक शिक्षा 'ग' स्तर पर राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा की पाठ्यचर्या

मॉड्यूल/पाठ	पाठों की संख्या	अध्ययन अवधि (घंटों में)	अंक
मॉड्यूल I : अंकगणित	**03**	**20**	**20**
1. प्राकृत तथा पूर्ण संख्याएं			
2. पूर्णांक			
3. वर्ग और वर्गमूल तथा घन और घनमूल			
मॉड्यूल II : बीजगणित	**03**	**15**	**10**
4. बीजगणित से परिचय			
5. बीजीय व्यंजक एवं संक्रियाएँ			
6. एक चर में रैखिक समीकरण			
मॉड्यूल III : व्यावसायिक गणित	**03**	**20**	**25**
7. अनुपात तथा समानुपात			
8. प्रतिशतता एवं उसके अनुप्रयोग			
9. साधारण तथा चक्रवृद्धि ब्याज			
मॉड्यूल IV : ज्यामिति	**06**	**20**	**20**
10. आधारभूत ज्यामितीय अवधारणाएं			
11. कोण एवं समांतर रेखाएँ			
12. त्रिभुज एवं उसके प्रकार			
13. चतुर्भुज एवं उसके प्रकार			
14. वृत्त			
15. सर्वांगसम तथा सममित आकृतियाँ			
मॉड्यूल V : क्षेत्रमिति एवं सांख्यिकी	**03**	**15**	**15**
16. समतल आकृतियों का क्षेत्रफल			
17. ठोसों का आयतन			
18. सांख्यिकी से परिचय			
मॉड्यूल VI : वैदिक गणित	**02**	**10**	**10**
19. वैदिक गणित से परिचय			
20. वैदिक गणित के अनुप्रयोग			
योग	20	100	100

4. पाठ्यचर्या विवरण

मॉड्यूल I : अंकगणित

पाठ 1 : प्राकृत तथा पूर्ण संख्याएं

प्राकृत तथा पूर्ण संख्याएं एवं उन पर संक्रियाएं, प्राकृत एवं पूर्ण संख्याओं के गुणधर्म, गुणनखण्ड और गुणज, अभाज्य द्विक, सह-अभाजय संख्याएं, अभाज्य गुणनखण्ड, अभाज्य गुणनखण्ड को अद्वितीय रूप में लिखना, महत्तम समावर्तक (म.स.) और लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) को गुणनखण्ड एवं भाग विधि से ज्ञात करना, दो संख्याओं के म.स., ल.स. एवं संख्याओं में संबंध स्थापित करना, विभाज्यता के नियम।

पाठ 2 : पूर्णांक

पूर्णांक संख्याओं की रचना, पूर्णांकों का संख्या रेखा पर निरूपण, संख्या रेखा पर पूर्णांकों को क्रमबद्ध करना, संख्या रेखा द्वारा पूर्णांकों का योग तथा घटाना, पूर्णांकों का निरपेक्ष मान, पूर्णांकों पर संक्रियाएं एवं गुणधर्म, पूर्णांकों का विभाजन समूहन संकेतों का प्रयोग।

पाठ 3 : वर्ग और वर्गमूल तथा घन और घनमूल

संख्याओं के वर्ग की समझ विकसित करना, प्राकृत संख्याआं के वर्ग, वर्गमूल, गुणनफल विधि द्वारा किसी परिपूर्ण वर्ग का वर्गमूल ज्ञात करना, विभाजन विधि द्वारा परिपूर्ण संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना, वर्गमूलों पर आधारित प्रश्न, पूर्ण घन संख्याएं, किसी संख्या को पूर्ण घन संख्या बनाना, घनमूल की समझ, अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा किसी पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करना।

मॉड्यूल II : बीजगणित

पाठ 4 : बीजगणित से परिचय

चर एवं अचर की समझ विकसित करना, अंकगणित की सहायता से बीजगणित का परिचय, अक्षरों और संख्याओं पर मौलिक संक्रियाएं, चर और अचर की सहायता से गुणा एवं भाग की संक्रियाएं, पद और गुणांक का अर्थ, सजातीय तथा विजातीय पद, सजातीय पदों का संकलन एवं व्यवकलन, चरों की गुणा।

पाठ 5 : बीजीय व्यंजक एवं संक्रियाएँ

बीजीय व्यंजक की अवधारणा, दो अथवा अधिक चरों वाले पदों के गुणांक, बीजीय व्यंजक के सजातीय तथा विजातीय पद, बीजीय व्यंजकों के प्रकार, बीजीय व्यंजक की घात, बीजीय व्यंजक का मान, बीजीय व्यंजकों का संकलन तथा व्यवकलन करना, बीजीय व्यंजकों की गुणा।

पाठ 6 : एक चर में रैखिक समीकरण

समीकरण की अवधारणा, रैखिक समीकरण, गणितीय रचनाएं, रैखिक समीकरणों को हल करना।

मॉड्यूल III : व्यावसायिक गणित

पाठ 7 : अनुपात तथा समानुपात

अनुपात, समानुपात, समानुपात के प्रकार, ऐकिक नियम, समय और काम, काम तथा अनुपात, समय और दूरी।

पाठ 8 : प्रतिशतता एवं उसके अनुप्रयोग

प्रतिशत का भिन्न रूप, भिन्नों को प्रतिशत रूप में बदलना, किसी राशि का कुछ निश्चित प्रतिशत ज्ञात करना, प्रतिशत से संबंधित कुछ शाब्दिक प्रश्न, लाभ और हानि, प्रतिशत लाभ या हानि, बट्टा।

पाठ 9 : साधारण तथा चक्रवृद्धि ब्याज

साधारण ब्याज, चक्रवृद्धि ब्याज, चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज में अन्तर।

मॉड्यूल IV : ज्यामिति

पाठ 10 : आधारभूत ज्यामितीय अवधारणाएं

बिन्दु, रेखा व तल, रेखाखंड व किरण, दो बिन्दुओं से होती हुई रेखा तथा एक ही तल में दो रेखाएं, संरेखीय बिन्दु व संगामी रेखाएं, संरेखीय बिन्दुओं को अंकित करना, संगामी रेखाओं की रचना, खुली व बंद आकृतियां, सरल आकृतियां, सरल बंद आकृतियों के अभ्यंतर और बर्हिभाग, ज्यामितीय यंत्र तथा उनका प्रयोग फुटा (रूलर) डिवाइड्र, परकार, सेट स्कवेयर, चांदा (प्रोट्रेक्टर), रेखाखंड की माप, पैमाने का प्रयोग कर किसी रेखाखंड की माप, पैमाने का प्रयोग कर एक दिये गये माप के रेखाखंड की रचना करना।

पाठ 11 : कोण एवं समांतर रेखाएँ

घूर्णन, कोण, कोणों की माप, कोणों को बनाना, $60°$, $120°$, $90°$, $30°$ के कोण बनाना, कोणों के प्रकार, कोणों के युग्म, असमांतर तथा समांतर रेखाएं, समांतर रेखाओं के युग्म, समांतर रेखाएं खींचना, लम्बवत रेखाएं।

पाठ 12 : त्रिभुज एवं उसके प्रकार

त्रिभुज, एक त्रिभुज बनाना, त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु, भुजाएं, कोण, बहिष्कोण तथा अभिमुख अंत: कोण, त्रिभुज के शीर्षलंब और माध्यिकाएं, त्रिभुज के काणों का योग, त्रिभुज के बहिष्कोण और उसके अभिमुख अंत:कोणों में संबंध, त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग, त्रिभुजों का वर्गीकरण, विषमबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज, समबाहु त्रिभुज, न्यून कोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, अधिक कोण त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज के गुणधर्म, समद्विबाहु त्रिभुज की कोणों एवं भुजाओं का गुणधर्म, समकोण त्रिभुज का गुणधर्म (पाइथागोरस प्रमेय)।

पाठ 13 : चतुर्भुज एवं उसके प्रकार

चतुर्भुज और इसके विभिन्न भाग, चतुर्भुज के कोणों का योग, समलंब, समांतर चतुर्भुज, आयत, वर्ग, समचतुर्भुज, पतंग।

पाठ 14 : वृत्त

वृत्त के हिस्से तथा अवयव, एक वृत्त की रचना करना, अर्द्धवृत्त में कोण की माप, वृत्त की जीवाओं की केंद्र से दूरियां।

पाठ 15 : सर्वांगसम तथा सममित आकृतियाँ

सर्वांगसमता, त्रिभुजों की सर्वांगसमता, त्रिभुजों की सर्वांगसमता के नियम या प्रतिबंध, SSS, SAS, ASA, RHS सर्वांगसमता नियम, सममिति, सममित अक्ष या रेखाओं की संख्या।

मॉड्यूल V : क्षेत्रमिति एवं सांख्यिकी

पाठ 16 : समतल आकृतियों का क्षेत्रफल

क्षेत्रफल, एक समतल क्षेत्र का क्षेत्रफल, क्षेत्रफल को मापने के मानक मात्रक, रेखीय आकृतियों का परिमाप, आलेख की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल, सूत्र की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल, आयत का परिमाप, एक वर्ग का परिमाप, समांतर चर्तुभुज का आलेख द्वारा क्षेत्रफल, समलंब का क्षेत्रफल, वृत्त की परिधि, वृत्त का क्षेत्रफल।

पाठ 17 : ठोसों का आयतन

घनाभ के फलक, घनाभ के किनारे और शीर्ष, घन, घनाभ एक विशेष रूप में, घनाभ तथा घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल, घनाभ तथा घन का आयतन।

पाठ 18 : सांख्यिकी से परिचय

आंकड़ों का संकलन, आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण, आंकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए आवृति (बारंबारता) का प्रयोग आंकड़ों का भिन्न श्रेणियों में समूहीकरण, दंड आलेख, दंड आलेख को पढ़ना, दंड आलेख की व्याख्या करना, दंड आलेख को खींचना, उचित अनुमाप/पैमाने की आवश्यकता, ग्राफ शीट पर दंड आलेख कैसे खीचा जाता है, वृत्त चित्र या पाई चार्ट।

मॉड्यूल VI : वैदिक गणित

पाठ 19 : वैदिक गणित से परिचय

वैदिक गणित के पठन पाठन का महत्व, वैदिक के सूत्र व अर्थ, विनकुलम अंकों का प्रयोग, विनकुलम संक्रियाएं, जोड़, सूत्र-शून्यांत, जोड़ सूत्र-निखलं, घटाव, मिश्रित संक्रियाएं (जोड़ एवं घटा)।

पाठ 20 : वैदिक गणित के अनुप्रयोग

गुणा की प्रथम विधि-सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण, गुणा-सूत्र एकाधिकेन तथा अन्त्योर्दशकेऽपि, गुणा-सूत्र निखिलम् (आधार, उपाधार), सूत्र- निखिलम् एवं आनुरूप्येण (उपाधार), गुणा-सूत्र उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्, गुणा तीन अंकों की-सूत्र उर्ध्वतिर्यग्भ्याम, वर्ग ज्ञात करना-सूत्र यावदूनं, वर्ग ज्ञात करना-सूत्र द्वन्द्वयोग, वर्गमूल-विलोकनम् द्वारा, घन-सूत्र निखिलम द्वारा, घनमूल-विलोकनम् द्वारा।

5. अध्ययन की योजना

यह पाठ्यक्रम मूलतः स्वाध्याय पर आधारित है। इसके लिए शिक्षार्थियों के मानसिक स्तर व परिवेश को देखते हुए पठन-सामग्री तैयार की गई है। चूँकि पाठ्यक्रम स्वाध्याय पर आधारित है अतः प्रत्येक पाठ के अंत में पाठ से सम्बन्धित प्रश्न दिए गए हैं, ताकि शिक्षार्थी की धारण-क्षमता व समस्या समाधान की दक्षता भी विकसित होती रहे। शिक्षार्थियों के लिए अध्ययन-केन्द्र पर सम्पर्क कक्षाओं का भी प्रावधान है। इन कक्षाओं में शिक्षार्थी अपनी गणित विषय-सम्बन्धी समस्याओं का समाधान कर सकेंगे। साथ ही, अपने साथियों से भी इन समस्याओं पर चर्चा कर सकेंगे। शिक्षार्थी साक्षरता केन्द्रों/प्रौढ़ शिक्षा केन्द्रों पर भी अपनी गणित विषय सम्बन्धी समस्याओं का समाधान पा सकेंगे।

6. मूल्यांकन योजना

6.1 स्व-मूल्यांकन

पाठ्यक्रम में शिक्षार्थी अपना स्वयं का मूल्यांकन करता रहेगा। इसके लिए प्रत्येक पाठ के बाद अभ्यास पत्र दिया गया है, जिसमें उस पाठों से सम्बन्धित प्रश्न हैं। शिक्षार्थी उन प्रश्नों के उत्तर देंगे तथा अंत में दिए गए उन प्रश्नों के सही उत्तर से अपना उत्तर मिलाएंगे। इस तरह, पाठ्यक्रम में स्व-मूल्यांकन की पद्धति अपनाई गई है।

6.2 बाह्य मूल्यांकन

पाठ्यक्रम पूरा करने के उपरांत शिक्षार्थी का बाह्य मूल्यांकन होगा। इसके लिए कुल 100 अंक निर्धारित किए गए हैं। इस मूल्यांकन में शिक्षार्थी की लिखित परीक्षा होगी। इसकी अवधि 3 घंटे की है। प्रश्न पत्र में पाठ आधारित प्रश्न हैं व बोध पर आधारित प्रश्न भी हैं। प्रश्न वस्तुनिष्ठ भी है, अति लघु उत्तरीय भी हैं तथा लघु उत्तरीय भी तथा दीर्ध उत्तरीय प्रश्न भी होंगे। कुल मिलाकर 35 प्रश्न होंगे।

प्रश्न पत्र रूपरेखा

विषय : गणित (C-103)
कक्षा : स्तर 'ग' पाठ्यचर्या (प्रौढ़)

अंक : 100 **समय : 3 घंटे**

1. उद्देश्यों के अनुसार प्रश्नों का भारिता

उद्देश्य	अंक	कुल अंकों का प्रतिशत
ज्ञान संबंधी	30	30
ज्ञान की समझ संबंधी	50	50
ज्ञान का अनुप्रयोग संबंधी	10	10
दक्षता या कौशल संबंधी	10	10
कुल	100	100

2. प्रश्नों की प्रकार के अनुसार भारिता

प्रश्नों के प्रकार	प्रश्नों की संख्या	भार	योग	एक परीक्षार्थी द्वारा लिया जाने वाला अनुमानित समय
वृहत उत्तर प्रश्न (L.A.)	5	6	30	45 मिनट
लघु उत्तर प्रश्न (S.A.)	10	4	40	60 मिनट
अतिलघु उत्तर प्रश्न (V.S.A.)	10	2	20	40 मिनट
बहु विकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.)	10	1	10	20 मिनट
कुल	35		100	165 मिनट 15 मिनट दोहराने के लिए

3. मॉड्यूल अनुसार भारिता

क्र.सं.	मॉड्यूल	अंक
1.	अंकगणित	20
2.	बीजगणित	10
3.	व्यावसायिक गणित	25
4.	ज्यामिति	20
5.	क्षेत्रमिति एवं सांख्यिकी	15
6.	वैदिक गणित	10
	कुल अंक	100

4. कठिनाई के अनुसार प्रश्नों की भारिता

स्तर	अंक	अंक प्रतिशत
कठिन	25	25
औसत	50	50
आसान	25	25

नमूना प्रश्न पत्र

गणित (C-103)

अधिकतम अंक : 100 | **समय : 3 घंटे**

निर्देश

- इस प्रश्न पत्र में कुल 35 प्रश्न हैं, जो चार खण्डों A, B, C तथा D में विभाजित हैं।
- खण्ड A में 1 से 10 तक बहुकल्पीय प्रश्न हैं। प्रत्येक के लिए 1 अंक निर्धारित है। उत्तर के रूप में A, B, C तथा D चार विकल्प दिए हैं जिनमें से कोई एक सही है। आपको सही विकल्प चुनना है तथा अपनी उत्तर पुस्तिका में A, B, C तथा D में जो सही हो उत्तर के रूप में लिखना है।
- खण्ड B में 11 से 20 तक अतिलघु उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 2 अंक निर्धारित हैं।
- खण्ड C में 21 से 30 तक लघु उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 4 अंक निर्धारित हैं।
- खण्ड D में 31 से 35 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 6 अंक निर्धारित हैं।
- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

खंड-A

1. दो सहअभाज्य संख्याओं का ल.स. बराबर है, इनके

   (A) योग के (B) गुणन के (C) अंतर के (D) माध्य के

2. एक मिलियन में होते हैं

   (A) 10 हजार (B) 100 हजार (C) 1000 हजार (D) 10,000 हजार

3. एकपद $5\,xy^2$ में x का गुणांक है

   (A) 5 (B) $5y$ (C) y^2 (D) $5y^2$

4. एक रैखिक समीकरण $2x + 5 = 13$ का हल है

   (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9

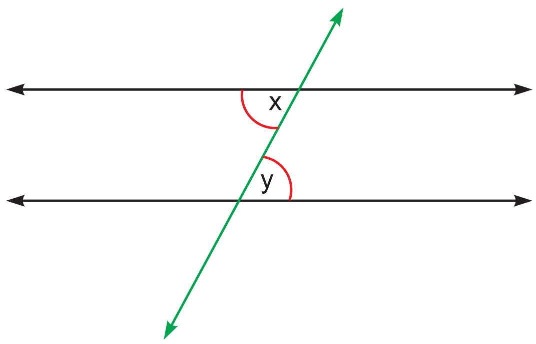
5. एक विद्यार्थी ने गणित में 80 में से 60 अंक प्राप्त किए। उस द्वारा गणित में प्राप्त अंकों का प्रतिशत है

   (A) 48 (B) 60 (C) 75 (D) 80

6. $54°$ का सम्पूरक कोण है

   (A) $306°$ (B) $144°$ (C) $126°$ (D) $36°$

7. संलग्न आकृति में $\angle x$ और $\angle y$ का युग्म



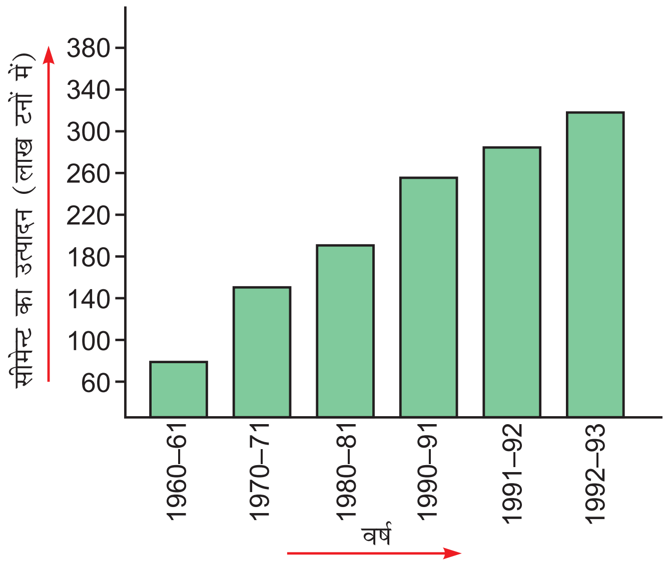
(A) एकांतर कोणों का युग्म है

(B) संगत कोणों का युग्म है

(C) एक रैखिक युग्म है

(D) शीर्षाभिमुख कोणों का युग्म है

8. संलग्न दंड आलेख में वर्ष 1991–1992 में सीमेंट का उत्पादन (लाख टनों में) है



(A) 260 (B) 280 (B) 300 (C) 340

9. वैदिक गणित में ''यावदूनम्'' सूत्र का सम्बन्ध है

(A) गुणा से (B) भाग से (C) वर्गमूल से (D) घटा से

10. ''पहले से एक अधिक'' सूत्र का नाम है

(A) एकाधिकेन पूर्वेण (B) एक न्यूनेन पूर्वेण (C) व्यष्टि समष्टिः (D) प्रावर्त्य योजयेत्

खंड-B

11. वह संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे 680 में से घटाने पर प्राप्त संख्या पूर्ण वर्ग हो।

12. तीन घंटियां क्रमशः 4, 6, 9 मिनटों के अंतराल पर बजती हैं। यदि वह एक साथ बजना शुरू करें, तो कितने समय के बाद वह पुनः इकट्ठी बजेंगी?

13. $42 - 3x^2 + x + 6x^3$ में से $5x^3 - 6x^2 + x + 37$ को घटाइए।

14. कथन "x के दो गुना से y, 2 अधिक है" को बीजीय व्यंजक द्वारा प्रकट कीजिए।

15. यदि $a : b = 4 : 5$ और $b : c = 8 : 9$ हो तो $a : c$ ज्ञात कीजिए।

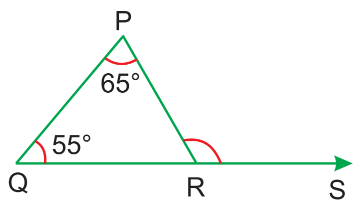
16. एक कार 5 लीटर पैट्रोल से 82 कि.मी. चलती है। 48 लीटर पैट्रोल में यह कितनी दूरी तय करेगी?

17. समचतुर्भुज की एक भुजा 6.5 सेमी तथा ऊँचाई 4 सेमी है। समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

18. एक घनाभ आकृति की पानी की टंकी में 28 घन मीटर पानी आता है। यदि इसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमश: 4 मी. और 2 मी. हों तो टंकी की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

19. किसी समकोण त्रिभुज का एक न्यून कोण $45°$ है। इस त्रिभुज के दो अन्य कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

20. नीचे दिए गए चित्र में $\angle PRQ$ तथा बहिष्कोण PRS की माप ज्ञात कीजिए।



खंड-C

21. सरल कीजिए :

$(-13) + (-6)$ ¸ $2 - [(-5) \times (-4) - \{2 - (3 - 5)\}]$

22. 1728 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

23. समीकरण $\dfrac{3x+5}{2x+7} = 4$ को हल कीजिए तथा उत्तर की जांच कीजिए।

24. एक 60 मीटर लंबी गाड़ी को एक 90 मीटर लंबे प्लेटफार्म को पार करने में 10 सैकेंड लगते हैं। इसकी गति (चाल) कि.मी./ घंटा ज्ञात कीजिए।

25. एक परीक्षा में जावेद ने रीना से 20% अधिक अंक प्राप्त किए। परीक्षा के अधिकतम अंक 600 है तो प्रत्येक द्वारा प्राप्तांक ज्ञात कीजिए। यदि दोनों द्वारा कुल प्राप्तांक 720 है।

26. दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की शर्तें लिखिए।

27. एक चतुर्भुज के कोण 4 : 5 : 6 : 9 के अनुपात में हैं। कोण ज्ञात कीजिए।

28. एक राज्य में 1995 से 2000 के बीच राष्ट्रीयकृत बैंकों की संख्या के आंकड़े निम्नलिखित हैं। इन आँकड़ों का दंड आलेख खींचिए :

वर्ष	1995	1996	1997	1998	1999	2000
बैंकों की संख्या	80	90	120	120	130	160

29. सूत्र विलोकनम् द्वारा संख्या 17576 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

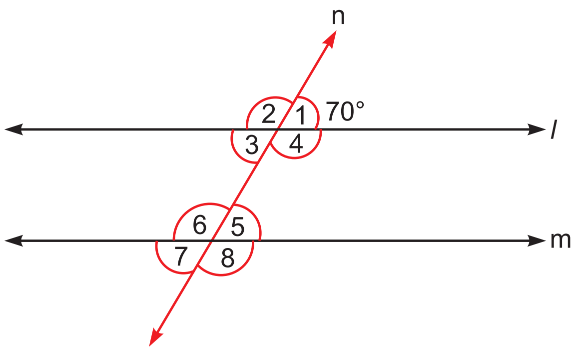
30. गुणा सूत्र उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् द्वारा का 43×57 का मान ज्ञात कीजिए।

खंड-D

31. 120 चूजों को बेचने पर जोसेफ को 30 चूजों के विक्रय मूल्य के बराबर हानि होती है। प्रतिशत हानि ज्ञात कीजिए। यदि वह इन्हें ₹ 7200 में खरीदता है तो एक चूजे का विक्रय मूल्य क्या होता?

32. यदि एक राशि के साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में ₹ 50 का अंतर हो, तो मूलधन ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज की दर 10 प्रतिशत वार्षिक तथा समय 2 वर्ष हो।

33. आकृति में, $l \parallel m$ और n एक तिर्यक रेखा है।



यदि $\angle 1 = 70°$ हो, तो

(i) $\angle 2$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) एक संगत कोणों का युग्म लिखिए।

(iii) एक एकांतर कोणों का युग्म लिखिए।

(iv) एक शीर्षाभिमुख कोणों का युग्म लिखिए।

(v) एक तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोणों का योग 180 होता हैं, इस कथन की जांच कीजिए।

34. 55 मीटर लम्बे एवं 22 मीटर चौड़े मैदान में वर्गाकार दरियां बिछानी हैं। एक जैसे माप की कम से कम बिछाई जाने वाली दरियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

35. एक परीक्षा में 30 विद्यार्थियों ने निम्न अंक प्राप्त किए :

10, 21, 15, 25, 32, 8, 36, 37, 28, 19, 7, 11, 6, 25, 21

28, 36, 22, 35, 15, 9, 14, 21, 15, 27, 38, 39, 30, 22, 35

समान माप के वर्गतंराल वाली बारंबारता सारणी बनाईए, जिसमें एक वर्गतंराल 21–30 है। इस बारम्बारता सारणी के एिल आयत चित्र बनाइए।

अंक वितरण योजना

खंड-A

1. (b)	2. (c)	3. (d)	4. (a)	5. (c)
6. (c)	7. (a)	8. (b)	9. (a)	10. (a)

खंड-B

11.

$$\begin{array}{r|l} & 26 \\ \hline 2 & 680 \\ & 4 \\ \hline 46 & 280 \\ & 276 \\ \hline & \quad 4 \end{array}$$

वर्गमूल ज्ञात करने के लिए 1

680 में से 4 घटाने के लिए 1½

अतः पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें से 4 घटाना चाहिए।

12. 4, 6 और 9 का ल.स. 36 है। 1½

घंटियां 36 मिनट के बाद पुनः इकट्ठी बजेंगी। ½

13. क्रम में करते हुए, ½

$$\begin{array}{l} 6x^3 - 3x^2 + x + 42 \\ 5x^3 - 6x^2 + x + 37 \\ -\quad + \qquad - \quad - \\ \hline x^3 + 3x^2 \qquad + 5 \end{array}$$

(½+ ½+½)

14. x के दो गुना को 2x लिखने पर ½

2 जमा कर $2x + 2$ लिखने पर ½

$y = 2x + 2$ लिखने पर 1

15.

a	:	b	:	c
4	:	5		
		8	:	9

पहले को 8 से और दूसरे को 5 से गुना करने पर (½ + ½)

a : c = 32 : 45 1

16. 5 लीटर पैट्रोल में कार चलती है 82 कि.मी. ½
1 लीटर पैट्रोल में कार चलती है 82/5 कि.मी. ½

48 लीटर पैट्रोल में कार चलती है $\frac{82 \times 48}{5}$ कि.मी. ½

= 787.2 कि.मी. ½

17. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई ½
= (6.5 × 4) वर्ग सेमी 1
= 26 वर्ग सेमी ½

18. $4 \times 2 \times h = 28$ 1
अत: $h = 3.5$ मी. 1

19. समकोण त्रिभुज का एक कोण 90° होता है। 1
तीसरा कोण $= 180° - 90° = 45°$ 1

20. $\angle PRS = 65° + 55°$ 1
$= 120°$ ½
$\angle PRQ = 180° - \angle PRS = 180° - 120° = 60°$ ½

खंड-C

21. $(-13) + (-6) \div 2 - [20 - \{2 - (-2)\}]$ 1
$= (-13) + (-6) \div 2 - [20 - 4]$ 1
$= -13 + (-6) \times \frac{1}{2} - 16$ 1
$= -13 \; -3 \; -16$ ½
$= -32$ ½

22.

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

2

$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} = 2 \times 2 \times 3$ 1½

$= 12$ ½

23. वज्रगुणन द्वारा

$3x + 5 = 8x + 28$ 1

$3x - 8x = 28 - 5$

$-5x = 23$ 1

$x = -\frac{23}{5}$ 1

जांच $\dfrac{3\times\left(-\frac{23}{5}\right)+5}{2\times\left(-\frac{23}{5}\right)+7} = 4$ 1

24. 10 सैकेंड में कुल दूरी = 60 मीटर + 90 मीटर

= 150 मीटर 1

गति = 150/10 = 15 मीटर/ सैकेंड 1

गति कि.मी. प्रति घंटा = $\dfrac{15\times60\times60}{1000}$

= 54 कि.मी./घंटा 2

25. जावेद एवं रीना के प्राप्तांकों का अन्तर = 20%

कुल अंक = 600

वास्तविक अन्तर = $600 \times 20\% = 120$ 1

अत: जावेद ने रीना से 120 अंक अधिक प्राप्त किए।

दोनों द्वारा प्राप्त अंक = 720

दोनों द्वारा प्राप्त शेष अंक $= 720 - 120 = 600$ 1

रीना व जावेद में इन 600 में से अंक प्राप्त किए = 300 तथा 300 1

अत: रीना ने 300 तथा जावेद ने कुल 420 अंक प्राप्त किए। 1

26. सर्वांगसमता की चार शर्त सही-सही लिखने पर प्रत्येक हेतु 1 अंक $1+1+1+1 = 4$

27. चतुर्भुज के कोणों का योग $= 360°$ 1

$4 + 5 + 6 + 9 = 24$ 1

पहला कोण $= \dfrac{360°\times4}{24} = 60°$ ½

दूसरा कोण $= \dfrac{360°\times5}{24} = 75°$ ½

तीसरा कोण $= \frac{360° \times 6}{24} = 90°$ ½

और चौथा कोण $= \frac{360° \times 9}{24} = 135°$ ½

28. ठीक माप लेने के लिए 1

प्रत्येक सही आयत के लिए, ½×6

29. 17576 का घनमूल

पहला चरण समूह बनाना $\overline{17}\,\overline{576}$ 1

दूसरा चरण $2^3 < 17$ अत: दहाई का अंक $= 2$ 1

576 में चरमांक $= 6$ 1

अत: 17576 का घनमूल $= 26$ 1

30. 43×57

$3 \times 7 = 21$ 1

$4 \times 7 + 5 \times 3 = 28 + 15 = 43$ 1

$4 \times 5 = 20$ 1

गुणनफल $= 24_4 5_2 1$ 1

खंड-D

31. माना एक चूजे का विक्रय मूल्य = ₹ 1 ½

120 चूजों का विक्रय मूल्य = ₹ 120 ½

और हानि = 30 चूजों का विक्रय मूल्य = ₹ 30 1

अब क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य + हानि

= ₹ 120 + ₹ 30 = ₹ 150 1

हानि प्रतिशत $= \frac{\text{हानि} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}} = \frac{30 \times 100}{150} = 20$ 1

पुन: क्रय मूल्य = ₹ 7200

$\therefore$ हानि $= \frac{20}{100} \times 7200 =$ ₹ 1440 1

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि

= ₹ (7200 – 1400)

= ₹ 5760 ½

1 चूजे का विक्रय मूल्य = ₹ $\frac{5760}{120}$ = ₹ 48 ½

32. माना मूलधन $= ₹\ 100$

दर $= 10$ प्रतिशत वार्षिक

समय $= 2$ वर्ष

साधारण ब्याज $= \dfrac{100\times10\times2}{100} = ₹\ 20$ 1+1

चक्रवृद्धि ब्याज $= 100\left(1+\dfrac{10}{100}\right)^2 - 100$ 1

$= ₹\ 21$ 1

चक्रवृद्धि ब्याज – साधारण ब्याज $= ₹\ 21 - 20$

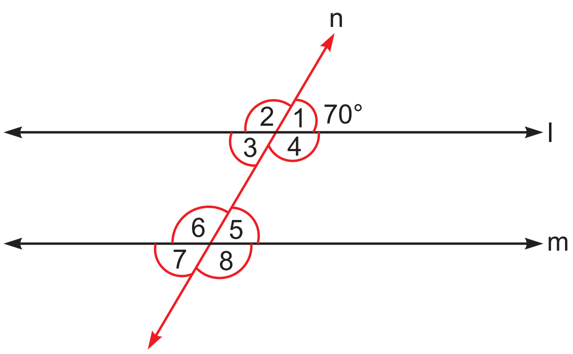
$= ₹\ 1$ 1

जब अंतर ₹ 1 है तो मूलधन = ₹ 100

जब अंतर ₹ 50 है तो मूलधन = ₹ (100 × 50) 1

अत: मूलधन = ₹ 5000

33.



(i) $\angle 2 = 110$ 1

(ii) $\angle 1$ और $\angle 5$ या $\angle 2$ और $\angle 6$ या $\angle 3$ और $\angle 7$ या $\angle 4$ और $\angle 8$ 1

(iii) $\angle 6$ और $\angle 4$ या $\angle 3$ और $\angle 5$ या $\angle 1$ और $\angle 7$ या $\angle 2$ और $\angle 8$ 1

(iv) $\angle 3$ और $\angle 1$ या $\angle 2$ और $\angle 4$ या $\angle 6$ और $\angle 8$ या $\angle 5$ और $\angle 7$ 1

(v) $\left.\begin{array}{l}\angle 4 = 110° \text{ और } \angle 5 = 70° \\ \angle 4 + \angle 5 = 180°\end{array}\right\}$ 1

$\left.\begin{array}{l}\angle 3 = 70° \text{ और } \angle 6 = 110° \\ \angle 3 + \angle 6 = 180°\end{array}\right\}$ 1

34. मैदान का क्षेत्रफल = (55 × 22) वर्गमीटर 1

एक जैसे माप की दरी की माप = 55 एवं 22 का म.स. 1

55 एवं 22 का म.स. = 11 1

छोटी दरी का क्षेत्रफल = (11×11) वर्गमीटर 1

दरियों की संख्या $= \dfrac{\text{मैदान का क्षेत्रफल}}{\text{दरी का क्षेत्रफल}}$ ½

$= \dfrac{55 \times 22}{11 \times 11}$ 1

$= 10$ ½

35.

वर्ग अन्तराल	टैली	बारंबारता
1–10	$\cancel{||||}$	5
11–20	$\cancel{||||}$ |	6
21–30	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ |	11
31–40	$\cancel{||||}$ |||	8

(½+½+½+½)

प्रत्येक वर्ग अन्तराल के लिए सही आयत चित्र बनाना। 1×4